MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
MÜNSTER

H. WIELANDT
MAINZ

HERAUSGEGEBEN VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR G. HERGLOTZ
A. E. INGHAM H. KNESER O. PERRON
W. SÜSS H. WEYL

53. BAND 3. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 30. SEPTEMBER 1950)

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1950

Math.
Z.

53. Band. **Inhalt:** 3. Heft.

Seite

Köthe, Prof. Dr. G., Mainz, Math. Institut der Universität: Über zwei Sätze von Banach 203

Hadwiger, Prof. Dr. H., Bern (Schweiz), Hochfeldstr. 31: Minkowskische Addition und Subtraktion beliebiger Punktmengen und die Theoreme von Erhard Schmidt 209

Wielandt, Prof. H., Mainz, Göttelmannstr. $2^5/_{10}$: Lineare Scharen von Matrizen mit reellen Eigenwerten 218

Birkhoff, Prof. G., Harvard University, Cambridge 38, Mass. (USA.): Extensions of Lie Groups 225

Löbell, Prof. Dr. F., München 23, Herzogstr. 1 a: Eine Verallgemeinerung des Pentagramma Mirificum 235

Haack-Hellwig, Prof. Dr. W. Haack, Institut für angew. Mathematik der Techn. Universität, Berlin-Charlottenburg 2, Hardenbergstr. 34: Über Systeme hyperbolischer Differentialgleichungen erster Ordnung I 243

Bödewadt, Dr. U. T., 47. Avenue des Platanes Brunoy (Seine et Oise) Frankreich: Über die Fourierkoeffizienten einer zusammengesetzten Funktion 266

Stuloff: Dr. N., München, Universität, Math. Institut: Über die Entwickelbarkeit von Funktionen in verallgemeinerte Dirichletsche Reihen 272

Copeland, Sr. A., Ann Arbor, Mich. (USA.): Implicative Boolean Algebra 285

Unveränderter Nachdruck 1975

Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

Mathematische Zeitschrift, Band 53, Heft 3, S. 203—209 (1950).

Über zwei Sätze von Banach.

Herrn Erich Kamke zum 60. Geburtstag am 18. August 1950 gewidmet.

Von

Gottfried Köthe in Mainz.

S. Banach ([1], S. 38 ff.) bewies den Satz, daß jede lineare stetige Abbildung eines Raumes vom Typus (F) auf einen abgeschlossenen Teilraum eines anderen Raumes vom Typus (F) ein Homomorphismus ist. J. Dieudonné und L. Schwartz bewiesen allgemeiner ([3], th. 1), daß jede lineare stetige Abbildung eines Raumes vom Typus (LF) auf einen ebensolchen Raum ein Homomorphismus ist. Wir zeigen in § 1, daß dieser Satz auch noch für die lokalkonvexen Hüllen E von (F)-Räumen $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$ gilt. Diese Räume haben wir in [7] eingeführt in Verallgemeinerung der (LF)-Räume. Wir bemerken, daß wir uns dabei zum Unterschied von Banach auf lokalkonvexe (F)-Räume beschränken, ebenso wie Dieudonné und Schwartz in [3]. Die Beweismethode ist im wesentlichen die des ursprünglichen Banachschen Beweises. Daß der Satz für Abbildungen auf abgeschlossene Teilräume nicht mehr richtig sein dürfte, wird durch ein Beispiel für einen nur wenig komplizierteren Raum wahrscheinlich gemacht.

S. Banach ([1], S. 121) bewies, daß im konjugierten Raum E' eines Banach-Raumes E ein linearer Teilraum dann und nur dann regulär abgeschlossen ist, wenn er transfinit abgeschlossen ist. In topologischer Sprechweise lautet der Satz so: Ein linearer Teilraum H von E' ist dann und nur dann schwach abgeschlossen, wenn der Durchschnitt von H mit jeder abgeschlossenen Kugel in E' schwach kompakt ist. Durch Heranziehung des Filterbegriffs konnte J. Dieudonné ([2], th. 23) den Beweis wesentlich vereinfachen. In [6] bewies ich für Stufenräume die schärfere Aussage, daß eine Teilmenge eines Stufenraumes dann und nur dann abgeschlossen bezüglich der Topologie $\mathfrak{T}_k$ (dort als k-Topologie bezeichnet) ist, wenn sie schwach folgenabgeschlossen ist. Für den konjugierten Raum E' eines (F)-Raumes bewiesen J. Dieudonné und L. Schwartz einen Satz ([3], th. 5), der das Banachsche Ergebnis verschärft und verallgemeinert und im wesentlichen der Aussage (§ 2 Satz 1) gleichwertig ist, daß eine Teilmenge von E' dann und nur dann abgeschlossen bezüglich der Topologie $\mathfrak{T}_c$ ist, wenn ihr Durchschnitt mit jeder $\mathfrak{T}_c$-abgeschlossenen beschränkten Menge $\mathfrak{T}_c$-abgeschlossen ist. Wir zeigen mit Hilfe des Satzes, daß in einem

vollkommenen Raum jede schwach folgenkompakte Menge schwach kompakt ist (§ 2 Satz 3), daß sich auch das angegebene Resultat über Stufenräume aus dem Satz von Dieudonné und Schwartz ableiten läßt.

M. Krein und V. Šmulian bewiesen ([8] § 2 Satz 5), daß im konjugierten Raum eines Banach-Raumes eine Menge dann und nur dann regulärkonvex ist, wenn ihr Durchschnitt mit jeder beschränkten regulärkonvexen Menge regulärkonvex ist. Die entsprechende Aussage (§ 2 Satz 2) für komplexe Räume vom Typus (F) ist ebenfalls eine Folge von § 2 Satz 1. Wir benutzen im wesentlichen die Terminologie von [3] und [7].

§ 1.

Ein (F)-Raum E ist ein lokalkonvexer komplexer linearer Raum, indem eine wachsende Folge von Halbnormen $p_n(x)$ erklärt ist und der bezüglich der durch diese Halbnormen erzeugten Topologie vollständig ist. Die Nullumgebungen U_n aller x mit $p_n(x) \leqq \frac{1}{n}$ bilden ein abzählbares Fundamentalsystem von Umgebungen. Eine Teilmenge M von E ist daher abgeschlossen, wenn sie den Limes jeder konvergenten Folge aus Elementen von M enthält.

Wir betrachten lokalkonvexe Räume E, die die lokalkonvexe Hülle einer im strengen Sinn monotonen Folge $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$ von (F)-Räumen sind (vgl. [7]). Die Topologie $\mathfrak{T}_{n+1}$ von E_{n+1} ist in E_n also nicht feiner als $\mathfrak{T}_n$ und die Topologie von E wird durch die absolut konvexen Hüllen $\Gamma \bigcup_{n=1}^{\infty} U^{(n)}(0)$ erzeugt, $U^{(n)}(0)$ irgend eine Umgebung der Null in E_n in der Topologie $\mathfrak{T}_n$.

Satz 1 *Eine lineare stetige Abbildung A der lokalkonvexen Hülle E der (F)-Räume E_n auf die lokalkonvexe Hülle F der (F)-Räume F_n ist ein Homomorphismus.*

Beweis: Es sei $U_k^{(n)}$, $k = 1, 2, \ldots$, eine die Topologie $\mathfrak{T}_n$ von E_n erzeugende Folge von absolutkonvexen, abgeschlossenen Nullumgebungen, die die Beziehungen

$$2\, U_{k+1}^{(n)} \subset U_k^{(n)},\ k = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

erfüllen. Für jedes feste k ist die Vereinigung aller ganzzahligen Vielfachen $m U_k^{(n)}$ gleich E_n, also ist E selbst für jede Folge $k_1, k_2, \ldots \to \infty$ die Vereinigungsmenge der abzählbar vielen $m U_{k_n}^{(n)}$, $m, n = 1, 2, \ldots$.

Es gibt ein $q(p)$, so daß für alle k die bezüglich $\mathfrak{T}_p'$ abgeschlossene Hülle von $F_p \cap A(U_k^{(q)})$ in F_p einen inneren Punkt besitzt.

Wäre dies nicht der Fall, so gäbe es zu jedem n ein k_n, so daß $F_p \cap A(U_{k_q}^{(n)})$ in F_p bezüglich der Topologie $\mathfrak{T}_p'$ von F_p nirgends dicht wäre. Dann wäre aber auch jedes $F_p \cap A(m U_{k_n}^{(n)})$ in F_p nirgends dicht,

also wäre F_p die Vereinigung der abzählbar vielen nirgendsdichten $F_p \cap A(m\, U_{k_n}^{(n)})$, $m, n, = 1, 2, \ldots$, was unmöglich ist, da F_p als (F)-Raum ein Banachscher Raum ist.

Es gibt ein $q(p)$, so daß für alle k die bezüglich $\mathfrak{T}_p'$ abgeschlossene Hülle von $F_p \cap A(U_k^{(q)})$ eine Nullumgebung von F_p enthält.

Nach dem eben Bewiesenen gibt es auch einen Punkt y von $F_p \cap A(U_{k+1}^{(q)})$, der mit einer ganzen Umgebung $y + V$, V eine Nullumgebung von $\mathfrak{T}_p'$, in der abgeschlossenen Hülle von $F_p \cap A(U_{k+1}^{(q)})$ liegt. Also sind die Punkte $z - y$, $z \in F_p \cap A(U_{k+1}^{(q)})$, in V dicht. Da y und z beide in $A(U_{k+1}^{(q)})$ liegen, liegt wegen (1) jedes $y - z$ in $A(U_k^{(q)})$, also ist $F_p \cap A(U_k^{(q)})$ in V dicht.

Es gibt ein $q(p)$, so daß das Bild jeder $\mathfrak{T}_q$-Nullumgebung von E_q eine $\mathfrak{T}_p'$-Nullumgebung von F_p enthält.

Mit $V_k^{(p)}$, $k = 1, 2, \ldots$, werde eine die Topologie $\mathfrak{T}_p'$ von F_p erzeugende abnehmende Folge von absolutkonvexen abgeschlossenen Nullumgebungen bezeichnet. Wir wissen nach dem Bisherigen, daß es zu jedem k eine Nullumgebung $V_{l_k}^{(p)}$ gibt, in der $F_p \cap A(U_k^{(q)})$ dicht ist. Wir können durch eventuelle Verkleinerung $V_{l_{k+1}}^{(p)} \subset V_{l_k}^{(p)}$ und $V_{l_k}^{(p)} \subset V_k^{(p)}$ erreichen, so daß die $V_{l_k}^{(p)}$, $k = 1, 2, \ldots$, wieder ein $\mathfrak{T}_p'$ erzeugendes Umgebungssystem bilden.

Wir zeigen nun $A(U_k^{(q)}) \supset V_{l_{k+1}}^{(p)}$. Es sei $y \in V_{l_{k+1}}^{(p)}$ gegeben. Da $A(U_{k+1}^{(q)})$ in $V_{l_{k+1}}^{(p)}$ dicht ist, gibt es ein $y_1 \in V_{l_{k+1}}^{(p)}$ mit einem Urbild $x_1 \in U_{k+1}^{(q)}$, so daß $y - y_1 \in V_{l_{k+2}}^{(p)}$ liegt. Allgemein werde $y_n \in V_{l_{k+n}}^{(p)}$ so gewählt, daß y_n ein Urbild $x_n \in U_{k+n}^{(q)}$ hat und $y - \sum_{s=1}^{n} y_s$ in $V_{l_{k+n+1}}^{(p)}$ liegt. Da die $V_{l_k}^{(p)}$ ein erzeugendes Umgebungssystem in F_p bilden, ist $y = \sum_{n=1}^{\infty} y_n$ in F_p. Aus $x_n + \ldots + x_{n+t}$ in

$$U_{k+n}^{(q)} + \ldots + U_{k+n+t}^{(q)} \subset U_{k+n}^{(q)} + \frac{1}{2} U_{k+n}^{(q)} + \ldots + \frac{1}{2^t} U_{k+n}^{(q)} \subset 2\, U_{k+n}^{(q)}$$

folgt, daß auch die Reihe $\sum_{1}^{\infty} x_n$ in E_q konvergiert. Da die Abschnitte $\sum_{1}^{m} x_n$ in $2\, U_{k+1}^{(q)} \subset U_k^{(q)}$ liegen und $U_k^{(q)}$ abgeschlossen ist, liegt auch die Summe $x = \sum_{1}^{\infty} x_n$ in $U_k^{(q)}$. Aus der Stetigkeit von A folgt schließlich $A\, x = \sum_{1}^{\infty} A\, x_n = \sum_{1}^{\infty} y_n = y$, d. h. $y \in A(U_k^{(q)})$.

Zum Beweise von Satz 1 ist zu zeigen, daß es zu jeder Umgebung $U(0)$ in E eine Umgebung $V(0)$ in F gibt mit $A(U(0)) \supset V(0)$. Ist $U = \bigcap_{q=1}^{\infty} U_{k_q}^{(q)}$, so umfaßt $A(U)$ die Menge $\bigcap_{q=1}^{\infty} A(U_{k_q}^{(q)})$, die nach dem eben

Bewiesenen eine Nullumgebung $V_{r_p}^{(p)}$ jedes F_p enthält, also auch die Menge $\bigcap_{p=1}^{\infty} V_{r_p}^{(p)}$, die eine Nullumgebung in F ist.

Ist A eine lineare stetige Abbildung von E auf einen abgeschlossenen linearen Teilraum H von F, so ist (worauf in [3] hingewiesen wird) zwar H die Vereinigungsmenge der Folge $H_n = H \cap F_n$ von (F)-Räumen, aber die in H durch die Topologie $\mathfrak{T}'$ von F induzierte Topologie könnte gröber sein als die Topologie von H als lokalkonvexe Hülle der H_n. Wir erhalten im allgemeinen Fall aus Satz 1 nur die folgende Aussage:

Satz 1a. *A sei eine lineare stetige Abbildung der lokalkonvexen Hülle E der (F)-Räume E_n in die lokalkonvexe Hülle F der (F)-Räume F_n. Ist $A(E) \cap F_n = A_n$ abgeschlossen in F_n für jedes n, so ist A ein Homomorphismus von E auf die lokalkonvexe Hülle der A_n.*

Wir bemerken, daß die Abgeschlossenheit von $A(E)$ in F nicht vorausgesetzt zu werden braucht und daß sie nach [7] aus der Abgeschlossenheit der A_n in den F_n im allgemeinen nicht folgt. Die Vermutung, daß Satz 1 für Abbildungen auf abgeschlossene Teilräume im allgemeinen nicht richtig sein wird, stützt das folgende Beispiel, das wir in einer früheren Arbeit ([5], § 5) gebracht haben.

Der vollkommene Raum $\varphi\omega$ ist der Raum aller Vektoren

$$\mathfrak{x} = \{\xi_{11}, \xi_{12}, \ldots; \xi_{21}, \xi_{22}, \ldots; \ldots\} = \{\mathfrak{x}_1; \mathfrak{x}_2; \ldots; \mathfrak{x}_n; \mathfrak{o}; \mathfrak{o}; \ldots\},$$

die in endlich vielen Abteilungen beliebige Vektoren $\mathfrak{x}_i$ aus ω enthalten, alle anderen sind Nullvektoren $\mathfrak{o}$. Der im Sinn der Theorie der vollkommenen Räume dazu duale Raum ist $\omega\varphi$, der Raum aller Vektoren $\mathfrak{u} = \{u_1; u_2; \ldots\}$, u_i beliebig aus φ. Es ist leicht zu sehen, daß $\varphi\omega$ im Sinn von [3] die direkte Summe abzählbar vieler (F)-Räume ω ist. Also ist $\varphi\omega$ ein (LF)-Raum, erst recht also die lokalkonvexe Hülle von F-Räumen. Die Topologie $\mathfrak{T}$ der lokalkonvexen Hülle stimmt mit der in [5] als starken Topologie bezeichneten überein. In [5], § 5 Satz 3 wird nun eine lineare stetige Abbildung von φ auf einen abgeschlossenen Teilraum von $\varphi\omega + \omega\varphi$ angegeben, die kein Homomorphismus im Sinn der starken Topologie von $\varphi\omega + \omega\varphi$ ist. φ ist lokalkonvexe Hülle von endlichdimensionalen Räumen, $\varphi\omega + \omega\varphi$ ist nur wenig komplizierter als $\varphi\omega$.

§ 2.

Zwei lineare Räume E und F bilden ein Dualsystem (stehen in schwacher Dualität), wenn jeder aus Linearformen des anderen besteht und wenn aus $ux = 0$ für alle $u \in F$ stets $x = 0$, ebenso aus $ux = 0$ für alle $x \in E$ stets $u = 0$ folgt (vgl. [2]). Führt man in E durch die Nullumgebungen $\sup_{i=1,\ldots,n} |u_i x| \leqq \varepsilon$ die schwache Topologie $\mathfrak{T}_s$ ein,

so wird E ein lokalkonvexer Raum und F ist der dazu konjugierte Raum. Ebenso ist E der zu F konjugierte Raum. Durchläuft K die bezüglich $\mathfrak{T}_s$ kompakten Teilmengen von F, so wird durch die Umgebungen $\sup_{u \in K} |ux| \leqq \varepsilon$ die Topologie $\mathfrak{T}_k$ (in [3] als Topologie $\tau(E, F)$ bezeichnet) eingeführt, die feiner ist als $\mathfrak{T}_s$. Nach einem Ergebnis von G. Mackey ([9], Satz VII 4 und [10], Satz 4) sind E und F auch noch bezüglich $\mathfrak{T}_k$ zueinander konjugiert.

Ein lokalkonvexer Raum E mit der Topologie $\mathfrak{T}$ und sein bezüglich $\mathfrak{T}$ konjugierter Raum E' bilden stets ein Dualsystem und $\mathfrak{T}$ ist feiner als $\mathfrak{T}_s$ und gröber als $\mathfrak{T}_k$. Nimmt man an Stelle der Mengen K die bezüglich $\mathfrak{T}$ kompakten Teilmengen von F zur Definition der Nullumgebungen in E, so erhält man eine Topologie $\mathfrak{T}_c$, die offenbar gröber ist als $\mathfrak{T}_k$.

Mit diesen Bezeichnungen lautet die in der Einleitung bereits genannte Folgerung aus théorème 5 von [3]

Satz 1. *Ist E' der konjugierte Raum eines (F)-Raumes E, so ist eine Teilmenge V von E' dann und nur dann $\mathfrak{T}_c$-abgeschlossen, wenn ihr Durchschnitt mit jeder beschränkten, $\mathfrak{T}_c$-abgeschlossenen Menge $\mathfrak{T}_c$-abgeschlossen ist.*

Satz 1 kann übrigens leicht direkt mit der Beweismethode von Dieudonné und Schwartz hergeleitet werden. Wir ziehen eine Folgerung, die wir an anderer Stelle benötigen werden.

Die zu einer Menge $M \subset E$ polare Menge M° ist die Menge aller $u \in E'$ mit $|ux| \leqq 1$ für alle $x \in M$. Eine Menge M mit $M = M^{\circ\circ}$ heißt bipolar. Aus Satz 1 ergibt sich

Satz 2. *Eine absolutkonvexe Teilmenge M von E' ist dann und nur dann bipolar, wenn für jede beschränkte, $\mathfrak{T}_c$-abgeschlossene Menge $B \in E'$ die Menge $M \cap B$ $\mathfrak{T}_c$-abgeschlossen ist.*

Beweis: Nach [3], prop. 1 ist in einem beliebigen Dualsystem E, F die zu einer Menge M bipolare Menge $M^{\circ\circ}$ gleich der absolutkonvexen, $\mathfrak{T}_s$-abgeschlossenen Hülle von M. Bildet man nur die absolutkonvexe, $\mathfrak{T}_k$-abgeschlossene Hülle B von M, so liefert die Überlegung, die zum Beweis von [3], prop. 1 führt, für jedes $x_0 \overline{\in} B$ eine $\mathfrak{T}_k$-stetige Linearfunktion $l(x)$, für die $|l(x)| \leqq 1$ auf B und $l(x_0) > 1$ gilt. Nach dem Resultat von Mackey wird $l(x)$ aber durch ein $u \in F$ erzeugt, woraus $x_0 \overline{\in} M^{\circ\circ}$ folgt, also $B = M^{\circ\circ}$.

Damit ist bewiesen, *daß in einem Dualsystem E, F jede absolutkonvexe $\mathfrak{T}_k$-abgeschlossene Menge $\mathfrak{T}_s$-abgeschlossen und bipolar ist.* Der Beweis von Satz 2 ist jetzt einfach: Die Bedingung ist notwendig. Ist sie andererseits erfüllt, so ist M nach Satz 1 $\mathfrak{T}_c$-abgeschlossen, erst recht also $\mathfrak{T}_k$-abgeschlossen, daher nach dem eben Bewiesenen bipolar.

Wir untersuchen nun die Form, die § 2 Satz 1 speziell in den Stufenräumen (vgl. [6]) annimmt.

Aus dem zu Beginn des Paragraphen zitierten Resultat von Mackey und [4], § 4, Satz 2 ergibt sich, worauf Herr Dieudonné mich aufmerksam machte,

Satz 3. *In einem vollkommenen Raum E ist jede schwach folgenkompakte Menge schwachkompakt und umgekehrt.*

Ich gebe dafür einen einfachen direkten Beweis: a) Sei (F^α) ein Filter auf der schwach folgenkompakten Teilmenge M von E. Ist $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ ein Element aus F^α und $x_n = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ der n-te Abschnitt von x, so sei die aus den x_n gebildete Menge F_n^α. Die F_n^α bilden wieder einen Filter (F_n^α). Es seien die F^α schwach folgenabgeschlossen; dann sind es auch die F_n^α, denn ist $x_n^{(k)}$ für $k \to \infty$ im R^n konvergent gegen $x_n^{(0)}$, so gibt es eine schwach konvergente Teilfolge $x^{(k_j)}$ mit einem Limes $\tilde{x}^{(0)}$ in M und es ist $\tilde{x}_n^{(0)} = x_n^{(0)}$, da in einem vollkommenen Raum aus der schwachen Konvergenz einer Folge die Konvergenz der n-ten Abschnitte im R^n folgt. Also hat jeder Filter (F_n^α) als Durchschnitt aller F_n^α eine nichtleere abgeschlossene Menge G_n im R^n. Es sei $y^{(n)}$ eine Folge von Elementen aus M, der n-te Abschnitt $y_n^{(n)}$ von $y^{(n)}$ liege in G_n. Wir können die Folge als schwachkonvergent gegen ein Element $y^{(0)} \in M$ voraussetzen, denn für eine Teilfolge $y^{(n_k)}$ gilt erst recht $y_k^{(n_k)} \in G_k$. Auch $y_n^{(n)}$ liegt in G_n, da $y_n^{(m)}$ für $m \geqq n$ in G_n liegt und G_n abgeschlossen ist. Es gibt daher ein $z^{(n)} \in F^\alpha$ mit $z_n^{(n)} = y_n^{(n)}$. Die nach Voraussetzung existierende schwach konvergente Teilfolge der $z^{(n)}$ hat als Limes den koordinatenweisen Limes, das ist aber $y^{(0)}$. Also ist $y^{(0)}$ in F^α und, da dies für jedes F^α gilt, ist $y^{(0)}$ Häufungsstelle des Filters (F^α).

b) Ist umgekehrt M schwach kompakt und $x^{(n)}$ eine Folge von Elementen aus M, so kann man durch ein Diagonalverfahren eine in jeder Koordinate konvergente Teilfolge $x^{(n_k)}$ auswählen. Da $x^{(n_k)}$ eine Häufungsstelle hat, muß der koordinatenweise Limes $x^{(0)}$ mit $\xi_i^{(0)} = \lim_{k \to \infty} \xi_i^{(n_k)}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ diese Häufungsstelle sein. Auch jede Teilfolge von $x^{(n_k)}$ kann nur $x^{(0)}$ als Häufungsstelle haben. Wäre nun $x^{(0)}$ nicht schwacher Limes der Folge $x^{(n_k)}$, so müßte es eine Teilfolge mit einer von $x^{(0)}$ verschiedenen Häufungsstelle geben, was unmöglich ist (zu dieser Schlußweise vgl. Šmulian [11]). Wir bemerken, daß dieser Satz mit seinem Beweis auch für jede zwischen der starken und schwachen Topologie liegende Topologie gilt.

Jeder Stufenraum ist nach [6] der duale Raum eines gestuften Raumes E, als der konjugierte Raum von E bezüglich der Topologie $\mathfrak{T}_k$ von E. Nach [6], § 4, Satz 1 fällt die Topologie $\mathfrak{T}_k$ in E aber mit der starken zusammen. Die starke Topologie in E wird nach [6], § 4, Satz 5 durch eine Folge wachsender Halbnormen erzeugt, also ist E bezüglich der starken Topologie ein (F)-Raum und der Stufenraum der konjugierte Raum E'. Da nach [6], § 4, Satz 1 in E starke und schwache Konvergenz übereinstimmen, fallen nach Satz 3 die stark kompakten

Mengen in $\bar{E}$ mit den schwach kompakten Mengen zusammen, also sind $\mathfrak{T}_c$ und $\mathfrak{T}_k$ in E' identisch. Wegen Satz 3 und der Tatsache ([6], § 2, Satz 1), daß jede beschränkte schwach folgenabgeschlossene Menge schwach folgenkompakt ist, erhält § 2 Satz 1 die Gestalt ([6], § 4, Satz 4): *Eine Teilmenge M eines Stufenraumes ist dann und nur dann $\mathfrak{T}_k$-abgeschlossen, wenn sie limesabgeschlossen bezüglich der schwachen oder $\mathfrak{T}_k$-Konvergenz ist.*

Literaturverzeichnis.

[1] S. Banach, Théorie des opérations linéaires. Warschau 1932.

[2] J. Dieudonné, La dualité dans les espaces vectoriels topologiques. Ann. Sci. École Norm. Sup. (3) **59**, (1942), 107—139.

[3] J. Dieudonné und L. Schwartz, La dualité dans les espaces (F) et (LF), Ann. Institut Fourier **1** (1950), 61–101.

[4] G. Köthe, Erweiterung von Linearfunktionen in linearen Räumen, Math. Annalen **116** (1939), 719—732.

[5] G. Köthe, Die Quotientenräume eines linearen vollkommenen Raumes, Math. Zeitschrift **51** (1947), 17—35.

[6] G. Köthe, Die Stufenräume, eine einfache Klasse linearer vollkommener Räume, Math. Zeitschrift **51** (1948), 317—345.

[7] G. Köthe, Über die Vollständigkeit einer Klasse lokalkonvexer Räume Math. Zeitschrift **52** (1950), 627—630.

[8] M. Krein und V. Šmulian, On regularly convex sets in the space conjugate to a Banach space, Ann. math. Princeton, **41** (1940), 556—583.

[9] G. W. Mackey, On infinite-dimensional linear spaces, Transactions Amer. math. Soc. **57** (1945), 155–207.

[10] G. W. Mackey, On convex topological linear spaces, Transactions Amer. math. Soc. **60** (1946), 519—537.

[11] V. Šmulian, Sur les ensembles régulièrement fermés et faiblement compacts dans l'espace du type (B), C. R. URSS. **18** (1938), 405—407.

(Eingegangen am 27. Februar 1950.)

Mathematische Zeitschrift, Band 53, Heft 3, S. 210—218 (1950).

Minkowskische Addition und Subtraktion beliebiger Punktmengen und die Theoreme von Erhard Schmidt.

Herrn Erich Kamke zum 60. Geburtstag am 18. August 1950 gewidmet.

Von

H. Hadwiger in Bern.

Seit längerer Zeit ist bekannt[1]), daß der Brunn-Minkowskische Satz, der sich in seiner klassischen Form auf die Minkowskische Linearkombination zweier konvexer Körper des k-dimensionalen euklidischen Raumes bezieht, auf beliebige abgeschlossene und beschränkte Mengen ausgedehnt werden kann. Die bisher durchgeführten Erweiterungen beziehen sich auf den etwas spezielleren Fall, wo eine der beteiligten Mengen eine Kugel ist. Dieser Sonderfall reicht bekanntlich aus, um die bedeutsamste Folgerung — nämlich das Bestehen der isoperimetrischen Ungleichung mit Minkowskischen Maßzahlen — zu ziehen. In bezug auf das Isoperimetrieproblem bei beliebigen Punktmengen wurden in den letzten Jahren vor allem auch in methodischer Beziehung einige bemerkenswerte Fortschritte erzielt. Vor allem sind hier die Arbeiten von A. Dinghas[2]), E. Schmidt[3]) und H. Busemann[4]) zu nennen. Ein Vergleich mit den älteren Abhandlungen (vor allem der beiden erstgenannten Autoren) lehrt, daß die Verwendung der Analysis zugunsten der Mengengeometrie stark zurücktritt. Die mengen-

[1]) Eine erste Beweisskizze stammt von L. Lusternik (Die Brunn-Minkowskische Ungleichung für beliebige meßbare Punktmengen. C. R. Acad. Sci. URSS. **1935**III, 55—58). Vgl. auch W. Gross, Die Minimaleigenschaft der Kugel. Mh. Math. Physik **28** (**1917**), 77—97. Der erste symmetrisierungsfreie Beweis wurde von A. Dinghas gegeben (Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel im n-dimensionalen Raum. S.-B. Akad. Wiss. Wien, math.-naturw. Kl. II a **149** (**1940**) 399—432). Vgl. auch E. Schmidt und A. Dinghas, Einfacher Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel im n-dimensionalen euklidischen Raum. Abh. Preuß. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl. **1943**, Nr. 7.

[2]) A. Dinghas, Einfacher Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel im euklidischen Raum von n Dimensionen. Math. Nachr. **2** (**1949**) 107—113.

[3]) E. Schmidt, Die Brunn-Minkowskische Ungleichung und ihr Spiegelbild sowie die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel in der euklidischen und nichteuklidischen Geometrie. I und II, Math. Nachr. **1** (**1948**) 81—157 und **2** (**1949**) 171—244.

[4]) H. Busemann, The isoperimetric problem for Minkowski area. Amer. J. Math. **17** (**1949**) 743—762.

geometrische Arbeitsmethode ist den hier in Frage stehenden Problemen unmittelbarer angepaßt und die damit verbundene höhere Leistungsfähigkeit tritt in den allerletzten Arbeiten deutlich hervor.

Die vorliegende Arbeit schließt an die kürzlich erschienene Abhandlung von E. Schmidt[3]) an, in welcher simultan für den euklidischen, sphärischen und hyperbolischen Raum ein Beweis des Brunn-Minkowskischen Satzes gegeben und außerdem der Erweiterung des klassischen Satzes ein „Spiegelbild" an die Seite gestellt wird, dessen Geltung sich ebenso auf alle drei Geometrien erstreckt. — Meine Ausführungen beziehen sich vorläufig nur auf den euklidischen Raum, dagegen wird der Brunn-Minkowskische Satz in allgemeinerer Form für zwei beliebige Punktmengen gewonnen. Dieser bezieht sich auf die Minkowskische Addition zweier Mengen, die in der üblichen Weise definiert ist. Verschiedene Erwägungen legen es nahe, in geeigneter Weise eine Minkowskische Subtraktion zweier Mengen einzuführen. Es zeigt sich dann, daß das Spiegelbild des Brunn-Minkowskischen Satzes, das von E. Schmidt in einer etwas spezielleren Form entdeckt wurde, in analoger Weise der Subtraktion zugeordnet ist, und zwar so, daß sich der eine Satz unmittelbar und formal aus dem andern durch das Gesetz ergibt, welches Summe und Differenz miteinander verbindet.

Das betonte Hervortretenlassen dieser formalen Beziehungen scheint mir mannigfache Vorteile zu bieten und an einer gewissen Symmetrie der Aussagen wurde konsequent festgehalten.

Eine unmittelbare Folgerung des hier betrachteten Brunn-Minkowskischen Satzes in der erwähnten allgemeinen Form ist das Bestehen der isoperimetrischen Ungleichung, welche sich nunmehr auf eine Relativoberfläche bezieht, die sich auf Grund einer beliebig wählbaren „Eichmenge" definieren läßt. Ist die Eichmenge insbesondere die Einheitskugel, so handelt es sich um die übliche (untere) Minkowskische Oberfläche. Für konvexe Eichmengen mit inneren Punkten ergeben sich verallgemeinerte Minkowskische Oberflächen, wie sie kürzlich von H. Busemann[4]) untersucht wurden.

I.

In diesem ersten Abschnitt werden die in der vorliegenden Arbeit gewonnenen Resultate zusammengestellt. Die Beweise der einzelnen Aussagen erbringen wir im dritten Abschnitt.

A und B sollen zunächst beliebige Punktmengen des k-dimensionalen euklidischen Raumes bezeichnen. Die Wahl eines ausgezeichneten Punktes Z als gemeinsames Bezugszentrum ist nützlich.

So kann ein beliebiger Punkt X gegebenenfalls durch den ihm zugeordneten im Zentrum Z entspringenden Ortsvektor $\mathfrak{x}$ charakterisiert werden. Eine Translation τ soll eine Punktmenge A in die translationsgleiche Punktmenge A^τ überführen. Die Translation τ selbst wird in vielen Fällen durch Z^τ gekennzeichnet.

Zunächst wird eine Definition der Minkowskischen Addition gegeben; diese ist der klassischen Linearkombination nachgebildet und ist geläufig. Neu wird eine Definition der Minkowskischen Subtraktion vorgeschlagen. — Es bezeichne $\bar{A}$ die am Zentrum Z gespiegelte Punktmenge A. Nun formulieren wir die

Definition 1 a. b.

a. Die Minkowskische Summe $A+B$ zweier Punktmengen A und B ist die Vereinigungsmenge aller A^τ, erstreckt über sämtliche Translationen τ, für die $Z^\tau \in B$ gilt.

b. Die Minkowskische Differenz $A-B$ zweier Punktmengen A und B ist der Durchschnitt aller A^τ, erstreckt über sämtliche Translationen τ, für die $Z^\tau \in \bar{B}$ gilt.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, die soeben definierten Mengen $A+B$ und $A-B$ in anderer äquivalenter Weise zu charakterisieren. Wir erwähnen noch eine vektorgeometrische Interpretation, welche gelegentlich gute Dienste zu leisten vermag: Es sollen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ Ortsvektoren von Punkten der Mengen A und B bezeichnen. Es ist dann $A+B$ die Menge derjenigen Punkte, deren Ortsvektor $\mathfrak{x}$ die folgende Bedingung erfüllt: Es gibt stets zwei Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, so daß $\mathfrak{x}=\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ ist. Analog ist $A-B$ die Menge derjenigen Punkte, deren Ortsvektor $\mathfrak{y}$ die folgende Bedingung erfüllt: Zu jedem Vektor $\mathfrak{b}$ gibt es einen Vektor $\mathfrak{a}$, so daß $\mathfrak{y}=\mathfrak{a}-\mathfrak{b}$ ist.

Eine singuläre Rolle in unserem Zusammenhang spielt die leere Menge O. Einerseits kann ihre besondere Erwähnung kaum unterlassen werden, da eine Minkowskische Differenz $A-B$ in vielen Fällen leer wird; andererseits aber verlieren die folgenden in diesem Abschnitt zusammengestellten Gesetze in der Regel ihre Gültigkeit, wenn nicht alle angeschriebenen Punktmengen nichtleer sind. Die hier notwendigen Konventionen $A+O=O$, $A-O=O$, $O-A=O$ bedingen eine Unstetigkeit, welche die meisten Regeln zu Fall bringt. Es ist jedoch zu erwähnen, daß unser Zentrum Z kalkülmäßig die Rolle des Nullelements übernimmt. Dies erkennt man, indem man die mühelos verifizierbaren Relationen $A+Z=A$, $A-Z=A$, $A-A=Z$ in Betracht zieht. Die letzte der drei Beziehungen ist zwar nur für beschränkte A richtig.

Es bezeichne nun weiter A^* die zu A komplementäre Punktmenge. Es gilt nun

$$(1\,a)\quad A-B=(A^*+\bar{B})^*; \qquad (1\,b)\quad A+B=(A^*-\bar{B})^*,$$

eine Beziehung also, welche ausdrückt, daß Addition und Subtraktion durch eine komplementäre Transformation auseinander hervorgehen. Ferner gelten die Rechengesetze

$$(2\,a)\quad (A+B)+C=A+(B+C); \qquad (2\,b)\quad (A-B)-C=A-(B+C).$$

Weiter gelten die Relationen

$$(3\,a)\quad (A-B)+B\leqq A; \qquad (3\,b)\quad (A+B)-B\geqq A.$$

Im folgenden werden die Punktmengen A und B als abgeschlossen und beschränkt vorausgesetzt. — Es sei nun $\mathfrak{Q}$ eine $(k-1)$-dimensionale Ebene durch das Zentrum Z. $S(A)$ bedeute sodann die durch Symmetrisierung an der Ebene $\mathfrak{Q}$ aus A hervorgehende Punktmenge. Die Symmetrisierung S kann in der folgenden Weise kurz erklärt werden: Zuerst definieren wir $S(A)$ für eine lineare auf einer orthogonal zu $\mathfrak{Q}$ stehenden Geraden a liegende Punktmenge A als eine in a liegende abgeschlossene und bezüglich $\mathfrak{Q}$ symmetrisch liegende Strecke der Länge $V_1(A)$, wobei V_1 das lineare Lebesguesche Maß bezeichnen soll. Um nun zu einer Definition von $S(A)$ für ein beliebiges A zu gelangen, gehen wir wie folgt vor:

$A = \Sigma\, aA$, wobei sich die Mengenaddition (im gewöhnlichen Sinn) über alle auf $\mathfrak{Q}$ orthogonal stehenden Geraden a erstrecken soll, welche mit A einen nichtleeren Durchschnitt haben. Nun definieren wir: $S(A) = \Sigma\, S(aA)$.

Die Symmetrisierung von Summe und Differenz zweier abgeschlossener und beschränkter Punktmengen unterliegt nun dem folgenden Gesetz

$$(4\,a)\quad S(A+B) \supseteq S(A)+S(B); \qquad (4\,b)\quad S(A-B) \subseteq S(A)-S(B).$$

Weiter bedeute $r(A)$ den Volumradius von A, d. h. den Radius derjenigen Kugel, deren Volumen gleich dem k-dimensionalen Lebesgueschen Maß $V(A)$ ist. Sodann gelten die Relationen

$$(5\,a)\quad r(A+B) \geqq r(A)+r(B); \qquad (5\,b)\quad r(A-B) \leqq r(A)-r(B).$$

Diese beiden Gesetze verallgemeinern in der in der Einleitung angedeuteten Weise die sich auf den euklidischen Fall beziehenden Theoreme von E. Schmidt, nämlich den Brunn-Minkowskischen Satz (Relation (5 a)) und das Spiegeltheorem (Relation (5 b)).

Bevor wir weitergehen, soll nochmals daran erinnert werden, daß in den Sätzen (1) bis (5) alle angeschriebenen Mengen (d. h. auch die in Klammer gesetzten) als nichtleer vorausgesetzt werden müssen. Dies ist besonders beim Spiegeltheorem (5 b) zu beachten.

Nun leiten wir über zum Problem der isoperimetrischen Ungleichung. Es bedeute $V(A)$ das k-dimensionale Lebesguesche Maß von A.

Definition 2 a. b.

a. Die äußere Relativoberfläche $F_{+B}(A)$ der abgeschlossenen und beschränkten Punktmenge A bezüglich einer ebensolchen Eichpunktmenge B erklären wir durch

$$F_{+B}(A) = \liminf_{\varrho \to +0} \frac{V(A+\varrho B) - V(A)}{\varrho}.$$

b. Die innere Relativoberfläche $F_{-B}(A)$ ist analog durch

$$F_{-B}(A) = \liminf_{\varrho \to +0} \frac{V(A) - V(A-\varrho B)}{\varrho}$$

definiert.

Unter ϱB verstehen wir die Menge der Punkte mit den Ortsvektoren $\varrho \mathfrak{b}$, wobei $\mathfrak{b}$ die Ortsvektoren der Punkte von B bezeichnen.

Die so eingeführten Relativoberflächen genügen simultan der folgenden isoperimetrischen Ungleichung

$$F_{\pm B}(A)^k \geqq k^k V(B) V(A)^{k-1}. \tag{6 a b}$$

Ungleichungen dieser Art für verallgemeinerte Minkowskische Oberflächen wurden von H. Busemann[4]) abgeleitet.

II.

In diesem zweiten Abschnitt treten wir knapp kommentiert auf die Spezialisierungen ein, die sich dadurch ergeben, daß wir die eine der beiden im ersten Abschnitt betrachteten Punktmengen durch eine abgeschlossene Kugel K_ϱ vom Radius ϱ ersetzen, deren Mittelpunkt im Zentrum Z des Raumes angenommen wird. Wir lassen Definitionen und Sätze in der gleichen Reihenfolge kurz passieren:

Definition 3 a. b. c. Wir setzen

a. $A_\varrho = A + K_\varrho$; b. $A_{-\varrho} = A - K_\varrho$; c. $A^\varrho = K_\varrho - A$. A_ϱ und $A_{-\varrho}$ heißen äußere und innere Parallelmenge von A im Abstand ϱ; A^ϱ ist die von E. Schmidt betrachtete und auch so bezeichnete Punktmenge, auf die sich das Spiegeltheorem in der speziellen Form bezieht. — Es ergeben sich jetzt die folgenden Relationen:

$$(A^*)_\varrho = ((A^*)_\varrho)^*; \tag{7 a}$$

$$A_\varrho = ((A^*)_{-\varrho})^*; \tag{7 b}$$

$$(A + B)_\varrho = A + B_\varrho; \tag{8 a}$$

$$(A - B)_{-\varrho} = A - B_\varrho; \tag{8 b}$$

$$(A_{-\varrho})_\varrho \leqq A; \tag{9 a}$$

$$(A_\varrho)_{-\varrho} \geqq A; \tag{9 b}$$

$$S(A_\varrho) \geqq (S(A))_\varrho; \tag{10 a}$$

$$S(A_{-\varrho}) \leqq (S(A))_{-\varrho}. \tag{10 b}$$

Endlich gewinnt man als verschiedene Varianten des Brunn-Minkowskischen Satzes die drei Ungleichungen

$$r_\varrho(A) \geqq r(A) + \varrho; \tag{11 a}$$

$$r_{-\varrho}(A) \leqq r(A) - \varrho; \tag{11 b}$$

$$r^\varrho(A) \leqq \varrho - r(A). \tag{11 c}$$

Die Funktionale der linken Seiten bezeichnen die Volumradien der Mengen A_ϱ, $A_{-\varrho}$ und A^ϱ. Diese Relationen bilden in gewissem Sinn eine Schlüsselposition bei der neuzeitlichen Behandlung der Isoperimetrieprobleme. Alle drei Ungleichungen wurden von E. Schmidt[3]) abgeleitet. Die beiden ersten habe ich mit Erwähnung des gegenseitigen Zusammenhangs gelegentlich kurz mitgeteilt[5]). Die erste und wesent-

[5]) H. Hadwiger, Inhaltsungleichungen für innere und äußere Parallelmengen. Experientia **2** (1946) 490.

lichste Ungleichung ist indessen bereits von L. LUSTERNIK angegeben[6]) und später erstmals vollständig und exakt von A. DINGHAS[7]) begründet worden.

Der Vollständigkeit wegen formulieren wir noch die

Definition 4 a. b.

a. Die äußere MINKOWSKISCHE Oberfläche $F_+(A)$ der abgeschlossenen und beschränkten Punktmenge A ist erklärt durch

$$F_+(A) = \liminf_{\varrho \to +0} \frac{V(A_\varrho) - V(A)}{\varrho}.$$

b. Die innere MINKOWSKISCHE Oberfläche $F_-(A)$ ist analog durch

$$F_-(A) = \liminf_{\varrho \to +0} \frac{V(A) - V(A_{-\varrho})}{\varrho}$$

definiert.

Diese MINKOWSKISCHEN Oberflächenmaße genügen der isoperimetrischen Ungleichung

(12 a b) $$F_\pm(A)^k \geqq k^k \omega_k V(A)^{k-1},$$

wobei ω_k das Volumen der k-dimensionalen Einheitskugel bezeichnet.

III.

In diesem dritten Abschnitt stellen wir die Beweise der im ersten Abschnitt ausgesprochenen Behauptungen (1) bis (6) zusammen; die Aussagen (7) bis (12) des zweiten Abschnittes ergeben sich aus (1) bis (6) durch Spezialisierung und bedürfen keiner besonderen Beweisführung.

Beweis (1 a). Nach Def. 1 b ist $A - B = \Pi A^\tau$ erstreckt über alle τ mit $Z^\tau \in \overline{B}$; hieraus folgt zunächst $(A - B)^* = (\Pi A^\tau)^* = \Sigma (A^\tau)^* = \Sigma (A^*)^\tau = A^* + \overline{B}$ und hieraus $A - B = (A^* + \overline{B})^*$.

Beweis (1 b). Ersetzen wir in (1 a) A durch A^* und B durch $\overline{B}$, so ergibt sich $A^* - B = (A + B)^*$ oder also $A + B = (A^* - \overline{B})^*$.

Beweis (2 a). Er ergibt sich nach der vektoriellen Interpretation der MINKOWSKISCHEN Addition in trivialer Weise.

Beweis (2 b). Nach (1 a) hat man zunächst

$$(A - B) - C = ((A - B)^* + \overline{C})^* = ((A^* + \overline{B}) + \overline{C})^*$$
$$= (A^* + (\overline{B} + \overline{C}))^* = A - (B + C).$$

Beweis (3 a). Es sei $P \in (A - B) + B$; nach Def. 1 a gibt es eine Translation τ mit $Z^\tau \in B$, so daß $P \in (A - B)^\tau$ gilt. Bezeichnet jetzt $-\tau$ die zu τ inverse Translation, so ist $P^{-\tau} \in A - B$; da nun $Z^{-\tau} \in \overline{B}$ gilt,

[6]) loc. cit. Fußnote 1).

[7]) loc. cit. Fußnote 1).

hat man nach Def. 1 b demnach $P^{-\tau} \in A^{-\tau}$ oder also $P \in A$. Damit ist aber der Nachweis erbracht.

Beweis (3 b). In (3 a) ersetzen wir A durch A^* und B durch $\overline{B}$ und gewinnen zunächst $(A^* - \overline{B}) + \overline{B} \leqq A^*$, also $((A^* - \overline{B}) + \overline{B})^* \geqq A$. Verwenden wir nun (1 a), so folgt $(A^* - \overline{B})^* - B \geqq A$ und weiter nach (1 b) endlich $(A + B) - B \geqq A$.

Beweis (4 a). 1. Fall. $A \leqq a$ und $B \leqq b$ sollen zunächst lineare Punktmengen sein, welche auf den beiden orthogonal zu $\mathfrak{Q}$ stehenden Geraden a und b liegen. Es ist dann $A + B$ eine ebenfalls lineare Punktmenge, welche auf der Geraden $c = a^{\tau_0}$ liegt, wobei τ_0 irgendeine Translation bezeichnet, für die $Z^{\tau_0} = b$ gilt. Es bedeute nun $q(X)$ den orientierten Abstand eines beliebigen Raumpunktes X von $\mathfrak{Q}$ und es sei P derjenige Punkt von A, für welchen $q(P)$ den maximalen Wert, Q dagegen derjenige Punkt von B, für welchen $q(Q)$ den minimalen Wert annimmt. Man bedenke hierbei, daß die Mengen A und B abgeschlossen und beschränkt sind. Es sei nun α diejenige Translation, für die $Z^\alpha = Q$ ist; nach Def. 1 a gilt sodann $A^\alpha \leqq A + B$. Weiter sei β diejenige Translation, für die $Z^\beta = P$ ist. Die Menge derjenigen Punkte P^τ, für die $Z^\tau \in B$ gilt, ist dann wie leicht ersichtlich mit B^β identisch. Wieder nach Def. 1 a ist demnach auch $B^\beta \leqq A + B$. Andererseits ist der Durchschnitt $A^\alpha B^\beta$ mit P^α identisch. Bedeutet $V_1(A)$ das LEBESGUEsche lineare Maß, so hat man der oben erwähnten Sachlage zufolge $V_1(A) + V_1(B) \leqq V_1(A + B)$. — Nun sind $S(A)$, $S(B)$ und $S(A + B)$ nach Definition der Symmetrisierung Strecken der Längen $V_1(A)$, $V_1(B)$ und $V_1(A + B)$, die auf den Geraden a, b und c symmetrisch zu $\mathfrak{Q}$ liegen. Da weiter Z auf $\mathfrak{Q}$ liegt, ist ebenfalls $S(A) + S(B)$ eine Strecke der Länge $V_1(A) + V_1(B)$. In Verbindung mit der oben gemachten Feststellung betreffend die linearen Maße folgt offenbar $S(A) + S(B) \leqq S(A + B)$, also die zu beweisende Behauptung für den betrachteten 1. Fall.

2. Fall. A und B sollen jetzt beliebig sein, und es sei $P \in S(A) + S(B)$. Nach Def. 1 a ist dann $P \in (S(A))^{\tau_0}$, wobei $Z^{\tau_0} \in S(B)$ gilt. Es bezeichne nun c diejenige auf $\mathfrak{Q}$ orthogonal stehende Gerade, für welche $P \in c$ gilt, und es sei $c = a^{\tau_0}$; also ist $P \in a^{\tau_0}(S(A))^{\tau_0} = (S(aA))^{\tau_0}$. Bezeichnet noch andererseits b diejenige auf $\mathfrak{Q}$ orthogonal stehende Gerade, für welche $Z^{\tau_0} \in b$ gilt, so hat man offenbar $Z^{\tau_0} \in b\,S(B) = S(bB)$. Mit Rückblick auf die oben stehende Relation betreffend P schließt man wieder nach Def. 1 a $P \in S(aA) + S(bB)$ und im Hinblick darauf, daß nunmehr aA und bB lineare Mengen sind, nach dem 1. Fall $P \in S(aA + bB)$, also erst recht $P \in S(A + B)$. Damit ist der Nachweis abgeschlossen.

Beweis (4 b). Nach (3 a) hat man zunächst $S((A - B) + B) \leqq S(A)$ und mit Verwendung von (4 a) folgt hieraus $S(A - B) + S(B) \leqq S(A)$ oder weiter auch $(S(A - B) + S(B)) - S(B) \leqq S(A) - S(B)$; mit Verwendung von (3 b) endlich schließt man jetzt auf $S(A - B) \leqq S(A) - S(B)$.

Beweis 5a. Wir begründen zunächst in knapper Art ein von A. Dinghas [8]) herangezogenes Lemma, das sich auf die simultane Symmetrisierung zweier Mengen bezieht. Dieses lautet:

$$V(S(A)\,S(B)) = V(AB) + V(S(AB^*)\,S(BA^*)).$$

In der Tat: Bezeichnet g eine veränderliche stets auf $\mathfrak{Q}$ orthogonal stehende Gerade, dg das $(k-1)$-dim. Volumdifferential des Durchstoßpunktes $g\,\mathfrak{Q}$, so hat man zunächst

$$V(S(A)\,S(B)) = \int \mathrm{Min}\,[V_1(Ag),\, V_1(Bg)]\,dg.$$

Nun ist aber

$$\mathrm{Min}\,[V_1(Ag),\, V_1(Bg)]$$
$$= V_1(ABg) + \mathrm{Min}\,[V_1(Ag) - V_1(ABg),\, V_1(Bg) - V_1(ABg)],$$

so daß sich durch Integration über alle g hieraus die Aussage des Lemmas ergibt. Nun zum eigentlichen Beweis: Es bedeute $\mathfrak{S}'$ das System aller Punktmengen A', die sich durch nacheinander ausgeführte Symmetrisierungen an verschiedenen durch das Zentrum Z hindurchlaufenden Ebenen $\mathfrak{Q}$ aus A gewinnen lassen. Die A' sind abgeschlossen und gleichmäßig beschränkt. Ferner bezeichnen wir mit $\mathfrak{S}''$ das System aller abgeschlossenen Punktmengen A'', welche als Limesmengen konvergenter Folgen aus $\mathfrak{S}'$ darstellbar sind. Die Metrik sei hierbei auf die hier übliche Distanz $d(A, B) = \inf \sigma\,(A_\sigma \supseteq B,\, B_\sigma \supseteq A)$ bezogen. Es bezeichne K eine Kugel vom Radius $r(A)$ und dem Mittelpunkt in Z; offenbar ist $V(A) = V(K)$.

Nun setzen wir $J = \sup V(A''_\varrho K)$, wobei $\varrho > 0$ fest gedacht und die Bildung der oberen Schranke über alle A'' des Systems $\mathfrak{S}''$ verstanden wird. Nach dem bekannten Auswahlsatz gibt es in $\mathfrak{S}''$ ein A'', so daß $J = V(A''_\varrho K)$ gilt. Gewiß ist $J \leqq V(K)$; wir zeigen aber sogleich, daß $J = V(K)$ ist. In der Tat: Nehmen wir zunächst $J < V(K)$ an. Wegen $V(A''_\varrho) \geqq V(K)$ — man beachte hier, daß für jedes $A' \in \mathfrak{S}'$ stets $V(A') = V(A) = V(K)$ gelten muß — folgert man wegen $V(A''_\varrho K) < V(K)$, daß es zu einem geeignet klein gewählten $\varepsilon > 0$ zwei kongruente Kugeln P_ε und Q_ε vom Radius ε geben muß, so daß $P_\varepsilon \leqq A''_\varrho K^*$ und $Q_\varepsilon \leqq K A''^*_\varrho$ gilt. Wenden wir nunmehr das einleitend bereit gestellte Lemma für $A = A''_\varrho$ und $B = K$ an, so gewinnt man zunächst $V(S(A''_\varrho)\,K) \geqq V(A''_\varrho K) + V(S(P_\varepsilon)\,S(Q_\varepsilon))$. Hierbei sei die Symmetrisierung S so gewählt, daß $\mathfrak{Q}$ auf der Zentralen der beiden Kugeln P_ε und Q_ε orthogonal steht. Im Hinblick auf (10 a) — man bedenke, daß diese Relation durch (4 a) bewiesen ist — ergibt sich aus der oben stehenden Beziehung jetzt $V(A'''_\varrho K) \geqq V(A''_\varrho K) + V(P_\varepsilon)$, wobei wir abkürzend $A''' = S(A'')$ gesetzt haben. Da nun aber — wie leicht er-

[8]) loc. cit. Fußnote 2); im folgenden übernehme ich einige wesentliche Punkte der Dinghas'schen Beweiskonstruktion.

sichtlich ist — $A''' \in \mathfrak{S}''$ gilt, hat man mit $V(A'''_\varrho K) > J$ einen Widerspruch mit der Definition von J.

Es gibt nun offenbar ein $A' \in \mathfrak{S}'$, so daß $A'_\varrho \supseteq A''$ also auch $A'_{2\varrho} \supseteq A''_\varrho$ und wegen $V(A''_\varrho K) = J = V(K)$ endlich $A'_{2\varrho} \supseteq K$ gilt. Alle vorausgegangenen Betrachtungen über A gelten natürlich ebenso auch für B und zusammengefaßt läßt sich folgendes sagen: Es gibt endlich viele Symmetrisierungen an Ebenen $\mathfrak{Q}$ durch Z, so daß simultan A in A' und B in B' übergeführt wird, wobei $A'_{2\varrho} \supseteq K_{r(A)}$ und $B'_{2\varrho} \supseteq K_{r(B)}$ gilt. Nun ist aber nach (4 a) zunächst $(A+B)' \supseteq A' + B'$ und nach passender Verwendung von (8 a) weiter $(A+B)'_{4\varrho} \supseteq A'_{2\varrho} + B'_{2\varrho}$. In Verbindung mit den oben stehenden erfüllten Bedingungen für A' und B' einerseits und (10 a) andererseits gewinnt man hieraus $((A+B)_{4\varrho})' \supseteq K_{r(A)} + K_{r(B)} = K_{r(A)+r(B)}$, so daß sich auf $r_{4\varrho}(A+B) \supseteq r(A) + r(B)$ und dann mit $\varrho \to 0$ auf $r(A+B) \supseteq r(A) + r(B)$ schließen läßt. Damit ist der Beweis beendet.

Beweis (5 b). Nach (2 a) ist $(A-B)+B \subseteq A$, so daß zunächst $r((A-B)+B) \leqq r(A)$ ist; nach (5 a) gilt demnach auch $r(A-B) + r(B) \leqq r(A)$ oder also $r(A-B) \leqq r(A) - r(B)$.

Beweis (6 a b). Diese Beweise ergeben sich in zwangsläufiger Weise durch Anwendung von (5 a) und (5 b) auf Grund der Umrechnungsformel $V(A) = \omega_k r(A)^k$ aus der Definition 2 a. b. durch triviale Rechnung. ω_k ist das Volumen der k-dim. Einkeitskugel.

(Eingegangen am 7. März 1950.)

Mathematische Zeitschrift, Band 53, Heft 3, S. 219–225 (1950).

Lineare Scharen von Matrizen mit reellen Eigenwerten.

Herrn Erich Kamke zum 60. Geburtstag am 18. August 1950 gewidmet.

Von

Helmut Wielandt in Mainz.

Bei der Untersuchung des Begriffs der selbstadjungierten Eigenwertaufgabe wird man auf die folgende Frage geführt. Gegeben sei eine Gesamtheit $\mathfrak{M}$ von quadratischen n-reihigen Matrizen mit komplexen Elementen; wann gibt es im Raum der Spalten $\mathfrak{x}$ mit n komplexen Elementen eine definite hermitesche Metrik $(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) = \bar{\mathfrak{x}}' H \mathfrak{x}$, derart, daß $\mathfrak{M}$ die Gesamtheit aller bezüglich dieser Metrik selbstadjungierten Matrizen ist? Selbstadjungiertheit von M bedeutet $(\mathfrak{x}, M\mathfrak{y}) = (M\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$, also läuft die Frage darauf hinaus, wann es zu $\mathfrak{M}$ eine positiv definite hermitesche Matrix H gibt mit

$$(1) \qquad H M = \bar{M}' H \qquad \text{für alle } M \in \mathfrak{M}.$$

Positiv definit sind genau die Matrizen von der Form $\bar{T}' T$ mit $\det T \neq 0$, also läßt sich die Forderung (1) auch in die Gestalt

$$\bar{T}' T M = \bar{M}' \bar{T}' T, \text{ d. h. } T M T^{-1} = \overline{(T M T^{-1})}'$$

setzen, welche besagt, daß $T M T^{-1}$ hermitesch sein soll. Wir kommen so zu der zweckmäßigsten Formulierung unserer Frage: *Wann ist die vorgelegte Matrizenmenge $\mathfrak{M}$ zu der Gesamtheit $\mathfrak{H}$ aller hermiteschen n-reihigen Matrizen ähnlich?*

Notwendige Bedingungen hierfür erhält man aus allen Eigenschaften von $\mathfrak{H}$, die gegenüber Ähnlichkeitstransformationen invariant sind. Wir zählen die nächstliegenden auf: Die Matrizen von $\mathfrak{M}$ besitzen nur reelle Eigenwerte. $\mathfrak{M}$ ist eine *lineare Schar*, d. h. $\mathfrak{M}$ enthält neben je zwei Matrizen auch deren Linearverbindungen mit reellen Faktoren. Die *Dimension* von $\mathfrak{M}$ ist n^2, d. h. jede lineare Basis von $\mathfrak{M}$ besteht aus n^2 Matrizen. $\mathfrak{M}$ enthält sogar n^2 bezüglich komplexer Faktoren linear unabhängige Matrizen.

Unser erstes Ziel ist, zu zeigen, daß diese Bedingungen auch hinreichen. Wir nehmen einige Punkte des Beweises, auf die wir wiederholt zurückgreifen müssen, in dem folgenden Hilfssatz vorweg.

Satz 1. *Es sei $\mathfrak{M}$ eine lineare Schar der Dimension $d \geqq n^2$ von n-reihigen komplexen Matrizen M.*

(a) *Wenn die Spur $Sp\, M^2$ stets reell ausfällt, so ist $d = n^2$, und $\mathfrak{M}$ besteht genau aus denjenigen Matrizen A, bei welchen $Sp\, AM$ reell ist für jedes $M \in \mathfrak{M}$.*

(b) *Wenn außerdem $Sp\, M^2$ stets reell ist, so enthält $\mathfrak{M}$ mit M auch jede Potenz M^k $(k = 2, 3, \ldots)$.*

(c) *Wenn außerdem in $\mathfrak{M}$ eine Diagonalmatrix vorhanden ist, welche n voneinander und von 0 verschiedene reelle Eigenwerte besitzt, so enthält $\mathfrak{M}$ mit $M = (m_{\mu\nu})$ auch die Matrix $K = m_{\mu\nu} E_{\mu\nu} + m_{\nu\mu} E_{\nu\mu}$ $(\mu, \nu = 1, 2, \ldots, n)$.*

(Mit $E_{\mu\nu}$ wollen wir ständig diejenige Matrix bezeichnen, die im Feld (μ, ν) mit 1, sonst überall mit 0 besetzt ist.)

Beweis. (a) Mit $M_1 \in \mathfrak{M}$, $M_2 \in \mathfrak{M}$ ist auch $M_1 + M_2 \in \mathfrak{M}$, also fällt $2\, Sp\, M_1 M_2 = Sp[(M_1 + M_2)^2 - M_1^2 - M_2^2]$ reell aus (es ist $Sp\, M_1 M_2 = Sp\, M_2 M_1$). Umgekehrt sei $A = U + iV$ eine Matrix, für welche $Sp\, AM$ stets reell ausfällt. Diese Eigenschaft bedeutet, daß für eine lineare Basis $M_\delta = U_\delta + iV_\delta$ von $\mathfrak{M}$ gilt: $Sp(UV_\delta + VU_\delta) = 0$ $(\delta = 1, 2, \ldots, d)$. Dies ist ein reelles homogenes lineares Gleichungssystem vom Range d für die $2n^2$ reellen Elemente von U und V. Es gibt also nur $2n^2 - d$ linear unabhängige Lösungen (U, V); d solche Lösungen werden durch die (U_δ, V_δ) geliefert, also ist $d \leqq 2n^2 - d$, $d = n^2$. Ferner ist $(U, V) = \sum t_\delta (U_\delta, V_\delta)$ mit reellen t_δ, also ist $A = \sum t_\delta M_\delta \in \mathfrak{M}$.

(b) Ist $Sp\, M^2$ reell für alle $M \in \mathfrak{M}$, so ist für $N \in \mathfrak{M}$ und reelles t auch $Sp(M + tN)^2$ reell, daher ist der Koeffizient von t in diesem Polynom reell, d. h. es ist $Sp\, M^2 N$ reell. Nach (a) folgt $M^2 \in \mathfrak{M}$. Es sei nun für ein $m \geqq 1$ schon bewiesen, daß $M^k \in \mathfrak{M}$ ist für $1 \leqq k \leqq 2m$ und alle $M \in \mathfrak{M}$. Dann folgt das Gleiche für $m+1$ so: Es ist $m+1 \leqq 2m$, also $M^{m+1} \in \mathfrak{M}$, $Sp\, M^{2m+2}$ reell; ersetzt man hierin wieder M durch $M + tN$, so erweist sich $Sp\, M^{2m+1} N$ reell, also ist nach (a) $M^{2m+1} \in \mathfrak{M}$. Ferner ist $M^{2m+2} = (M^{m+1})^2 \in \mathfrak{M}$.

(c) Wenn es in $\mathfrak{M}$ eine reelle Diagonalmatrix A mit den voneinander und von 0 verschiedenen Diagonalelementen $a_{\varrho\varrho}$ gibt, so bilden wir das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} a_{\varrho\varrho}^{\varkappa}\, x_\varkappa = \delta_{\varrho\nu} = \begin{cases} 1 & (\varrho = \nu) \\ 0 & (\varrho \neq \nu) \end{cases} \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, n).$$

Es ist eindeutig lösbar, da das zugehörige homogene System offenbar unlösbar ist; die Lösung $x_\varkappa$ ist reell. Nach (b) ist $E_{\nu\nu} = \sum x_\varkappa A^\varkappa \in \mathfrak{M}$. Daher enthält $\mathfrak{M}$ auch die Matrix

$$(E_{\nu\nu} + M)^2 - E_{\nu\nu}^2 - M^2 = E_{\nu\nu} M + M E_{\nu\nu} = L.$$

Für die in Satz 1 erwähnte Matrix $K = E_{\mu\mu} M E_{\nu\nu} + E_{\nu\nu} M E_{\mu\mu}$ ergibt sich

$$K = E_{\mu\mu} L + L E_{\mu\mu} - \delta_{\mu\nu} L \in \mathfrak{M}.$$

Damit ist der Beweis von Satz 1 beendet; wir kommen auf unsere Frage zurück.

Satz 2. *Eine lineare Schar $\mathfrak{M}$ von n-reihigen Matrizen mit nur reellen Eigenwerten enthalte n^2 Matrizen, die bezüglich komplexer Faktoren linear unabhängig sind. Dann ist $\mathfrak{M}$ zur Gesamtheit $\mathfrak{H}$ der hermiteschen n-reihigen Matrizen ähnlich.*

Beweis. (a) Es werde zunächst vorausgesetzt, daß $\mathfrak{M}$ eine reelle Diagonalmatrix A enthält, deren Eigenwerte voneinander und von 0 verschieden sind. Dann erfüllt $\mathfrak{M}$ alle Voraussetzungen von Satz 1, daher ist neben $(m_{\mu\nu}) \in \mathfrak{M}$ stets auch

$$K = m_{\mu\nu} E_{\mu\nu} + m_{\nu\mu} E_{\nu\mu} \in \mathfrak{M}. \tag{2}$$

Hiernach ist $Sp\,K$ reell und $Sp\,K^2 \geqq 0$ (als Quadratsumme der reellen Eigenwerte von K). Dies besagt

$$m_{\nu\nu} \text{ reell}, \quad m_{\mu\nu} m_{\nu\mu} \geqq 0, \text{ wenn } (m_{\mu\nu}) \in \mathfrak{M}. \tag{3}$$

Wir setzen nun zusätzlich voraus, daß es in $\mathfrak{M}$ eine Matrix $B = (b_{\mu\nu})$ gibt mit

$$b_{1\nu} = |b_{\nu 1}| > 0 \qquad (\nu = 2, 3, \ldots, n). \tag{4}$$

Dann ist nach (3) $b_{\nu 1} \geqq 0$, also $b_{1\nu} = b_{\nu 1}$, daher ergibt sich aus (2) $E_{1\nu} + E_{\nu 1} \in \mathfrak{M}$. Hieraus folgt weiter für $2 \leqq \mu < \nu \leqq n$

$$E_{\mu\nu} + E_{\nu\mu} = (E_{1\mu} + E_{\mu 1} + E_{1\nu} + E_{\nu 1})^2 - (E_{1\mu} + E_{\mu 1})^2 - (E_{1\nu} + E_{\nu 1})^2 \in \mathfrak{M}.$$

Für $\mu \neq \nu$ und jedes reelle t ist daher $t(E_{\mu\nu} + E_{\nu\mu}) - M \in \mathfrak{M}$, also ist nach (3) $(t - m_{\mu\nu})(t - m_{\nu\mu}) \geqq 0$; hieraus folgt, daß $m_{\mu\nu}$ und $m_{\nu\mu}$ konjugiert komplex sind. Für $\mu = \nu$ haben wir dies schon in (3) erkannt, also ist $\mathfrak{M} \leqq \mathfrak{H}$ und wegen der Dimensionsvoraussetzung $\mathfrak{M} = \mathfrak{H}$.

(b) Um den Beweis von Satz 2 zu vollenden, zeigen wir, daß eine passende, zu $\mathfrak{M}$ ähnliche Schar $T^{-1}\mathfrak{M}T$ zwei Matrizen A, B von der in Teil (a) benutzten Art enthält. Zunächst gibt es in $\mathfrak{M}$ selbst eine Matrix C mit n voneinander und von 0 verschiedenen Eigenwerten. Denn sind M_ϱ n^2 komplex-unabhängige Matrizen aus $\mathfrak{M}$, sodaß also $C = \sum t_\varrho M_\varrho$ für reelle t_ϱ in $\mathfrak{M}$ liegt und für komplexe t_ϱ die Gesamtheit aller n-reihigen Matrizen durchläuft, so ist das Produkt der Determinante von C mit der Diskriminante der charakteristischen Gleichung von C ein Polynom $\Phi(t_1, \ldots, t_{n^2})$, welches für passende komplexe Werte t_ϱ von 0 verschieden ausfällt; wir können daher die t_ϱ auch reell so wählen, daß $\Phi \neq 0$ ist. Zu der so festgelegten Matrix $C \in \mathfrak{M}$ bestimmen wir eine Matrix R derart, daß $A = R^{-1}CR$ die Diagonalform hat, und betrachten weiterhin die Schar $R^{-1}\mathfrak{M}R$. Auch sie enthält n^2 komplex-unabhängige Matrizen, daher gibt es in ihr (nach einem ähnlichen Schluß wie oben) eine Matrix $D = (d_{\mu\nu})$, deren Elemente sämtlich von 0 verschieden sind. Bezeichnen wir nun mit S die Diagonalmatrix mit den Elementen

$$s_{11} = 1, \quad s_{\nu\nu} = d_{1\nu}^{-1} |d_{1\nu}|^{\frac{1}{2}} |d_{\nu 1}|^{\frac{1}{2}} \qquad (\nu = 2, \ldots, n),$$

so erhält die Matrix $B = S^{-1} D S$ in der ersten Zeile und Spalte die Elemente

$$b_{1\nu} = d_{1\nu} s_{\nu\nu} = |d_{1\nu}|^{\frac{1}{2}} |d_{\nu 1}|^{\frac{1}{2}}, \quad b_{\nu 1} = d_{\nu 1} s_{\nu\nu}^{-1} = d_{\nu 1} d_{1\nu} |d_{1\nu}|^{-\frac{1}{2}} |d_{\nu 1}|^{-\frac{1}{2}},$$

erfüllt also die Forderung (4). Sie liegt ebenso wie A in der Schar $T^{-1} \mathfrak{M} T$ mit $T = RS$. Nach (a) ist $T^{-1} \mathfrak{M} T = \mathfrak{H}$. Damit ist Satz 2 bewiesen.

Wenn in einer linearen Schar von n-reihigen Matrizen nur reelle Eigenwerte auftreten, hat die Schar nach Satz 1 höchstens die Dimension n^2. Diese Grenze wird erreicht bei den zu $\mathfrak{H}$ ähnlichen Scharen, aber durchaus nicht nur bei diesen. Z. B. hat auch die Schar $\mathfrak{D}$ der Dreiecksmatrizen, die oberhalb der Diagonale verschwindende und in der Diagonale reelle Elemente besitzen, nur reelle Eigenwerte und die Dimension n^2. Das Gleiche gilt für die lineare Schar $\mathfrak{H}_{n_1 n_2 \ldots n_p}$ der Matrizen von der Form

$$M = \begin{Vmatrix} M_{11} & 0 & 0 & \ldots 0 \\ M_{21} & M_{22} & 0 & \ldots 0 \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ M_{p1} & M_{p2} & M_{p3} & \ldots M_{pp} \end{Vmatrix}.$$

Dabei sollen $n_1, n_2, \ldots, n_p$ fest gewählte natürliche Zahlen mit der Summe n sein, und die Teilmatrizen unterliegen der Einschränkung, daß $M_{\varkappa\varkappa}$ eine $n_\varkappa$-reihige hermitesche Matrix ist. Z. B. ist $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_n$ und $\mathfrak{D} = \mathfrak{H}_{11\ldots1}$). Es läßt sich zeigen, daß hiermit, bis auf eine willkürliche Ähnlichkeitstransformation, alle Scharen der betrachteten Art gefunden sind, was eine wesentliche Vertiefung von Satz 2 bedeutet.

Satz 3. *Jede lineare Schar $\mathfrak{M}$ der Dimension n^2 von n-reihigen Matrizen M mit nur reellen Eigenwerten ist ähnlich zu einer Schar $\mathfrak{H}_{n_1 n_2 \ldots n_p}$.*

Beweis. (a) Wenn $\mathfrak{M}$ n^2 komplex-unabhängige Matrizen enthält, ist $\mathfrak{M}$ nach Satz 2 ähnlich zu $\mathfrak{H}_n$. Wir behaupten nun:

(b) Wenn $\mathfrak{M}$ nicht n^2 komplex-unabhängige Matrizen enthält, so gibt es eine Matrix S mit der Eigenschaft, daß alle Matrizen $S^{-1} M S$ in gleicher Weise zerfallen:

$$S^{-1} M S = \begin{pmatrix} M^{(11)} & 0 \\ M^{(21)} & M^{(22)} \end{pmatrix} \tag{5}$$

mit quadratischen Teilmatrizen $M^{(11)}$. Die Voraussetzung von (b) besagt, daß es eine n-reihige Matrix $N \neq 0$ mit der Eigenschaft

$$Sp\, NM = 0 \text{ für alle } M \in \mathfrak{M} \tag{6}$$

gibt. Die Gesamtheit $\mathfrak{N}$ aller Matrizen N mit der Eigenschaft (6) ist offensichtlich eine lineare Schar, bei der sogar komplexe Faktoren

zulässig sind. Nach Satz 1 liegt jede dieser Matrizen N in $\mathfrak{M}$, daher ist $Sp\,N^2 = 0$. Wenn umgekehrt für irgendeine Matrix $N \in \mathfrak{M}$ $Sp\,N^2 = 0$ ist, so ist $N \in \mathfrak{R}$. Denn für reelle t hat $N + tM$ reelle Eigenwerte, daher ist stets $Sp(N + tM)^2 \geqq 0$, also $Sp\,NM = 0$.

Wir zeigen als nächstes, daß $\mathfrak{M}$ eine Matrix M_0 mit n voneinander und von 0 verschiedenen Eigenwerten enthält. Hierzu betrachten wir die in $\mathfrak{M}$ gelegenen Matrizen der Gestalt $F = (f_{\mu\nu})$ mit $f_{\mu\nu} = 0$ für $\mu \leqq \nu$, also die Dreiecksmatrizen mit verschwindenden Diagonalelementen. Es gebe f, aber nicht mehr, reell-unabhängige Matrizen dieser Art ($f \geqq 0$). Für sie ist $Sp\,F^2 = 0$, also gilt $Sp\,FM = 0$ für alle $M \in \mathfrak{M}$. Hiernach bestehen f linear unabhängige lineare homogene Gleichungen für die $n^2 - n$ Zahlen $\mathrm{Re}\,m_{\mu\nu}$, $\mathrm{Im}\,m_{\mu\nu}$ ($\mu < \nu$), d. s. die Real- und Imaginärteile der oberhalb der Diagonale stehenden Elemente von M. Wenn wir also die Teilschar $\mathfrak{M}^*$ derjenigen Matrizen $M^* \in \mathfrak{M}$ bilden, für welche $m_{\mu\nu} = 0$ gilt ($\mu < \nu$), so stellen wir damit nur $n^2 - n - f$ Forderungen an die n^2 Scharparameter, daher besitzt $\mathfrak{M}^*$ mindestens die Dimension $n + f$. Andererseits gibt es in $\mathfrak{M}^*$ nur f reell-unabhängige Matrizen mit verschwindenden Diagonalelementen. Folglich treten in $\mathfrak{M}^*$ mindestens n reell-unabhängige Diagonalteile auf. Da die Diagonalelemente der Matrizen aus $\mathfrak{M}^*$ sämtlich reell sind, muß $\mathfrak{M}^*$ Matrizen mit beliebig vorgeschriebenen reellen Diagonalelementen enthalten, insbesondere eine Matrix M_0 mit n voneinander und von 0 verschiedenen Eigenwerten.

Wir kommen nun zum Kernpunkt des Beweises von (b): Es gilt

$$MN \in \mathfrak{R}, \text{ wenn } M \in \mathfrak{M},\ N \in \mathfrak{R}. \tag{7}$$

Es genügt, dies für die „speziellen" Matrizen M zu zeigen, die n voneinander und von 0 verschiedene Eigenwerte haben. Denn sobald dies geschehen ist, können wir zu einer beliebigen Matrix $M \in \mathfrak{M}$ und der eben bestimmten Matrix M_0 aus Stetigkeitsgründen eine reelle Zahl $t \neq 0$ so wählen, daß auch die Matrix $M_1 = M_0 + tM$ speziell ist, und haben

$$M_\varkappa N \in \mathfrak{R},\ MN = \frac{1}{t}(M_1 N - M_0 N) \in \mathfrak{R}.$$

Es sei also jetzt M eine spezielle Matrix. Wir können sie ohne Beschränkung der Allgemeinheit in der Diagonalform annehmen, indem wir nötigenfalls zu ähnlichen Scharen $R^{-1}\mathfrak{M}R$, $R^{-1}\mathfrak{R}R$ übergehen. Nach Satz 1 ist für die vorgelegte Matrix $N = (n_{\mu\nu})$

$$n_{\mu\nu}E_{\mu\nu} + n_{\nu\mu}E_{\nu\mu} = E_{\mu\mu}NE_{\nu\nu} + E_{\nu\nu}NE_{\mu\mu} = G \in \mathfrak{M},$$

Diese Matrix liegt aber sogar in $\mathfrak{R}$. Denn für jedes $L \in \mathfrak{M}$ gilt

$$Sp\,GL = Sp\,N(E_{\nu\nu}LE_{\mu\mu} + E_{\mu\mu}LE_{\nu\nu}) = Sp\,NK = 0,$$

da nach Satz 1 $K \in \mathfrak{M}$ ist. Aus $G \in \mathfrak{R}$ folgt $0 = Sp\,G^2 = 2(1 + \delta_{\mu\nu})n_{\mu\nu}n_{\nu\mu}$. Folglich ist entweder $n_{\mu\nu} = 0$ oder $n_{\nu\mu} = 0$. In jedem Fall ist daher $n_{\mu\nu}E_{\mu\nu} \in \mathfrak{R}$ ($\mu, \nu = 1, 2, \ldots, n$). Hieraus ergibt sich erstens

(8) $$n_{\nu\nu} = 0, \text{ wenn } (n_{\mu\nu}) \in \mathfrak{N},$$

und zweitens die behauptete Beziehung (7):

$$MN = \sum_{\varkappa} m_{\varkappa\varkappa} E_{\varkappa\varkappa} \sum_{\mu,\nu} n_{\mu\nu} E_{\mu\nu} = \sum_{\mu,\nu} m_{\mu\mu}(n_{\mu\nu} E_{\mu\nu}) \in \mathfrak{N}.$$

Aus (7) gewinnen wir die gesuchte Zerfällung von $\mathfrak{M}$ in der üblichen Art. Wir betrachten von jeder Matrix $N \in \mathfrak{N}$ die ν-te Spalte, wobei wir ν so festlegen, daß nicht alle diese Spalten verschwinden; die Gesamtheit $\mathfrak{S}$ dieser Spalten ist eine komplex-lineare Schar, in der die Maximalzahl linear unabhängiger Spalten $m < n$ ist (wegen (8)). Nach (7) ist $M\mathfrak{S} \leqq \mathfrak{S}$ für jedes $M \in \mathfrak{M}$. Wählt man nun eine nichtsinguläre Matrix S, deren letzte m Spalten zu $\mathfrak{S}$ gehören, so zerfällt $S^{-1}MS$ in der Form (5), wobei die Matrizen $M^{(22)}$ m-reihig sind.

(c) Nach den Ergebnissen von (a) und (b) brauchen wir den Beweis von Satz 3 nur noch in dem Fall zu führen, daß die vorgelegte lineare Schar nach Art von (5) zerfällt. Die Teilmatrizen $M^{(11)}$ bilden eine lineare Schar mit nur reellen Eigenwerten, also ist nach Satz 1 ihre Dimension $d^{(1)} \leqq (n-m)^2$; ebenso ist Dim $\mathfrak{M}^{(22)} = d^{(2)} \leqq m^2$. Daher gilt für die Dimension von $\mathfrak{M}$, da $\mathfrak{M}^{(12)}$ höchstens $2m(n-m)$ beitragen kann:

$$n' = \text{Dim } \mathfrak{M} \leqq d^{(1)} + d^{(2)} + 2m(n-m) \leqq m^2 + (n-m)^2 + 2m(n-m) = n^2,$$

folglich ist $d^{(1)} = (n-m)^2$ und $d^{(2)} = m^2$. Daher erfüllen die beiden Scharen $\mathfrak{M}^{(11)}$ und $\mathfrak{M}^{(22)}$ die Voraussetzungen von Satz 3. Ihre Reihenzahl ist kleiner als n. Wir können daher Satz 3 für sie als richtig annehmen. Es sei $\mathfrak{M}^{(11)}$ ähnlich zu $\mathfrak{H}_{n_1 \ldots n_k}$ und $\mathfrak{M}^{(22)}$ ähnlich zu $\mathfrak{H}_{n_{k+1} \ldots n_p}$; dann läßt sich offenbar $\mathfrak{M}$ durch eine Ähnlichkeitstransformation in eine Teilschar von $\mathfrak{H}_{n_1 \ldots n_p}$ überführen, die aber wegen der Dimension mit der ganzen Schar übereinstimmen muß.

Damit ist Satz 3 bewiesen. Er leistet die Bestimmung aller linearen Scharen größtmöglicher Dimension von Matrizen mit nur reellen Eigenwerten, aber nicht die Bestimmung schlechthin aller linearen Scharen von Matrizen mit nur reellen Eigenwerten. Denn es gibt Scharen, die sich nicht in eine solche der maximalen Dimension n^2 einbetten lassen. Z. B. ist für die Matrizen

$$M = \begin{pmatrix} o & t & o \\ s & o & -t \\ o & s & o \end{pmatrix}$$

stets $M^3 = 0$, also sind alle Eigenwerte 0; aber es gibt keine von s, t unabhängige Spalte $\mathfrak{x} \neq 0$ mit $M\mathfrak{x} = 0$, daher läßt sich die Schar nicht simultan auf Dreiecksform transformieren, also auch nicht in eine Teilschar einer Schar $\mathfrak{H}_{n_1 \ldots n_p}$.

Will man die Sätze 2 und 3 anwenden, so muß man die Realität der Eigenwerte nachweisen. Es ist bemerkenswert, daß dies auf einem einfachen rationalen Wege geschehen kann:

Satz 4. *Es sei $\mathfrak{M}$ eine lineare Schar der Dimension $d \geqq n^2$ von n-reihigen Matrizen M. Genau dann, wenn stets $Sp\,M^2 \geqq 0$ und $Sp\,M^3$ reell ist, haben alle Matrizen der Schar nur reelle Eigenwerte.*

Beweis. Die Bedingung ist offensichtlich notwendig. Ist sie andererseits erfüllt, so enthält $\mathfrak{M}$ nach Satz 1 auch alle Matrizen M^k, daher ist (ebenfalls nach Satz 1) $Sp\,M^{k+1}$ reell ($k = 1, 2, \ldots$). Hieraus folgt, daß die Eigenwerte z_ν von M in Paare konjugiert komplexer zerfallen. Es mögen von einer vorgelegten Matrix M genau $s (\geqq 0)$ Eigenwerte positiven Imaginärteil haben, etwa die ersten s, während die letzten r reell seien ($r = n - 2s \geqq 0$). Dann bilden wir das Polynom $f(z)$ kleinsten Grades mit

$$f(z_\sigma) = \frac{i}{z_\sigma}, \quad f(\bar{z}_\sigma) = -\frac{i}{\bar{z}_\sigma} \qquad (\sigma = 1, \ldots, s)$$

$$f(z_\nu) = 0 \qquad (\nu = 2s+1, \ldots, n).$$

f hat reelle Koeffizienten, also ist die Matrix $N = Mf(M) \in \mathfrak{M}$, daher ist $Sp\,N^2 \geqq 0$. Andererseits besitzt N die Eigenwerte i und $-i$ je s-mal, alle übrigen Eigenwerte verschwinden, also ist $Sp\,N^2 = -2s$. Hieraus ergibt sich $s = 0$, Satz 4 ist bewiesen.

Es soll hierzu noch bemerkt werden, daß die Bedingung der Realität von $Sp\,M^3$ weder fortgelassen noch durch die einfachere Bedingung der Realität von $Sp\,M$ ersetzt werden kann. Man erkennt dies aus dem folgenden Gegenbeispiel: Basismatrizen von $\mathfrak{M}$ seien außer

$$M_1 = \begin{pmatrix} -3+i & & \\ & 3+i & \\ & & -2i \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1+i & & \\ & 1-i & \\ & & -2 \end{pmatrix}$$

noch die Einheitsmatrix M_3 sowie die sechs Matrizen $E_{\mu\nu} + E_{\nu\mu}$, $i(E_{\mu\nu} - E_{\nu\mu})$ für $1 \leqq \mu < \nu \leqq 3$. Die Dimension von $\mathfrak{M}$ ist $9 = n^2$, für jede Matrix $M = \sum t_\varrho M_\varrho$ ist $Sp\,M$ reell sowie

$$Sp\,M^3 = 12\,t_1^3 + 4\,t_2^3 + 3\,t_3^3 + \sum_4^9 2\,t_\varrho^3 \geqq 0,$$

und doch besitzt M_1 keinen reellen Eigenwert.

(Eingegangen am 15. März 1950.)

Mathematische Zeitschrift, Band 53, Heft 3, S. 226—235 (1950).

Extensions of Lie Groups.

ERICH KAMKE to his 60th. birthday on August 18. 1950.

by

Garrett Birkhoff in Cambridge (Mass.).

§ 1.

Groups of rigid motions.

A short new solution of the RIEMANN-HELMHOLTZ problem in the large is given below. The proof involves a new technique for determining extensions of LIE groups, which may be successfully applied to other problems.

Let V be any real, connected n-dimensional RIEMANNIAN space, with the metric differential form

$$ds^2 = g_{ij}(x^{\rightarrow})\, dx_i\, dx_j \qquad [i = 1, \ldots, n], \tag{1}$$

where the g_{ij} are functions of position of class $C^{(2)}$. Let J be the topological group of all isometries of V, in the natural intrinsic topology [1]; let G be the connected component of J containing the identity — i. e., the set of all *rigid motions* of V.

Theorem 1. The rigid motions of V are a LIE group.

Outline of proof. Let $P_0, P_1, \ldots, P_n$ be points of V, so close together that geodesics are unique in a convex set containing them. One can introduce (though not symmetrically) *barycentric coordinates* in a „simplex" having the P_i for vertices, as follows. Any point Q „interior" to the simplex is on a unique geodesic γ from P_0, intersecting the opposite „face" $P_1, \ldots, P_n$ at a point Q_1, which is an $(n-1)$-simplex, and which may therefore be assumed to have barycentric coordinates. The barycentric coordinates of Q can then be defined from those of Q_1, and the ratio in which Q divides γ, by the usual formulas.

Then [2]) the extremals (geodesics) are curves of class $C^{(3)}$, and, being „shortest paths" locally, are permuted by all rigid motions. Again, a rigid motion is determined uniquely by the images of $P_0, P_1, \ldots, P_n$: such a motion preserves barycentric coordinates; hence if $\sigma(P_i) = \tau(P_i)$

[1]) R. F. ARENS, „A topology for spaces of transformations", Annals of Math. 47 (1946), 480–95.

[2]) For the relevant facts from the calculus of variations, see G. A. BLISS, „Lectures on the calculus of variations", Chicago, 1946, Chaps. 5, 6. For Thm. 1, see also S. B. Myers and N. E. Steenrod, Annals of Math. 40 (1939), p. 415.

for $i = 0, 1, \ldots, n$, the fixpoints of $\sigma\tau^{-1}$ include (*i*) a neighborhood, and (*ii*) with any two points, the geodesic through them. Since V is connected, it follows that $\sigma\tau^{-1}$ leaves V pointwise invariant, so that $\sigma = T$.

We can therefore introduce parameters locally in G, through the coordinates of the transforms of the P_i, and so represent G locally as a differentiable manifold of class $C^{(3)}$ in n^{n+1}-dimensional space. Further, the function of group composition will be of class $C^{(3)}$, by the implicit function theorem; hence G will be a LIE group [3]).

§ 2.

The classical geometries.

We may define the usual classical geometries in the large, as follows:

(2) Euclidean n-space E_n by $ds^2 = \sum dx_k^2$, $(x_1, \ldots, x_n)$ arbitrary,

(3) unit n-sphere by $r^2 = x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1$ in E_{n+1},

(3′) elliptic n-space as theunit n-sphere, with antipodal points identified, and

(4) hyperbolic n-space by $x_1^2 + \cdots + x_n^2 < 1$, $ds^2 = \sum dx_k^2/(1 - r^2)^2$.

The spaces (2), (3), (4) are easily shown to be *simply connected*. Each of the four spaces has a transitive $\frac{1}{2}n(n+1)$-*parameter group* G *of rigid motions*, and the subgroup S of stability [4]) of any point is the orthogonal group of n variables.

We next determine, in the large, all connected homogeneous spaces $\sum' = G'/S'$ which are locally equivalent to a given connected homogeneous space $\sum = G/S$. Since a "local equivalence" is defined as a local isomorphism between G and G' which maps S locally onto S', we can restrict our attention to the case that G and G' are connected. In the finitedimensional case, a "local equivalence" clearly amounts to an isomorphism between the corresponding LIE algebras.

If H is the covering group ([1], p. 53) of G, it is known that $G \cong H/D$, where D is a discrete subgroup of the center of H, and $\cong$ denotes isomorphism. Moreover, if C is the connected subgroup of H generated by the infinitesimal transformations of S, then $C \cup D \leqq f^{-1}(S)$, where f is the covering map of H onto G. Further, the intersection K of C with its conjugates is discrete, since the intersection of S with its conjugates in $G = H/D$ is the identity D/D of G (since G is faithful on G/S). Hence $(H/K)/(C/K)$ is also a homogeneous space. Since $C \cup D \leqq f^{-1}(S)$,

[3]) See G. BIRKHOFF, „Analytical groups", Trans. Am. Math. Soc 45 (1938), 61—101.

[4]) We follow the terminology of [1] for LIE groups, where possible. For "equivalence", "asystatic", and "imprimitive" we follow the original terminology of LIE. See also A. MALCEV, Izvestia Akad. Nauk SSSR 13 (1949), S. 9—32; and G. MOSTOW, Doctoral Thesis, Harvard University, 1948.

$(H/K)/(C/K)$ can be mapped continuously onto G/S; hence it is a *covering space* in the usual sense. Since it is constructed from the local properties of G and S, it is a *universal covering space* for all homogeneous spaces locally equivalent to G/S.

In case G/S is locally Euclidean, spherical, or hyperbolic, since the locally equivalent spaces (2)—(3)—(4) are simply connected, the construction of $(H/K)/(C/K)$, which can be mapped continuously and locally bicontinuously onto one of these spaces, must give this space exactly. Moreover S is the subgroup of stability of some point $p \in \Sigma$; letting $\Delta = f^{-1}(p)$, in $(H/K)/(C/K)$, be the discrete inverse image of p, we see that C/K must leave Δ setwise, and hence pointwise invariant. But by definition, C/K consists of all rotations about one — and hence all — points of Δ. Therefore Δ must include, with any two points p and q, the entire circle with center p and radius pq. This gives as the only discrete possibility, the pairs of antipodal points on the n-sphere — hence elliptic n-space is the only homogeneous space, locally equivalent to one of the three classical spaces, which is not simply connected.

In any case, $(H/K)/(C/K) = G^*/C^*$ can be mapped continuously and locally bicontinuously onto the simply connected covering space of G/S; hence the map is a homeomorphism and G^*/C^* is simply connected. The most general connected space locally equivalent to G/S can then be constructed as follows. Let $T \geqq C^*$ have C^* as its connected component, — i. e., let T/C^* be any discrete subgroup of $N(C^*)/C^*$, where $N(C^*)$ is the normalizer of C^* in G^*. Then G^*/T (which need not represent G^* faithfully in the large) is the desired answer.

In case G/S is *asystatic*, as in the cases (2)—(3)—(4), so are all locally equivalent homogeneous spaces. Moreover by definition $N(C^*)/C^*$ is already discrete, and corresponds to the set Δ of all points which have C^* for their subgroup of stability. Hence the T/C^* (i. e., the connected homogeneous spaces locally equivalent to G/S) correspond one-one to the partitions of Δ which are imprimitive under $N(C^*)/C^*$.

§ 3.

The Riemann-Helmholtz problem.

We shall now show that no connected n-dimensional Riemannian space V can possess more rigid motions than the classical geometries. Let G be the group of rigid motions of V, and let S be the subgroup of stability of a given point O of V. If G is an r-parameter group, then S is an $(r-k)$-parameter subgroup, where $k \leqq n$; and equality

holds only if V is (metrically) homogeneous. Again S induces homomorphically a *linear* group on the „tangent space" of (infinitesimal) line elements through O. This homomorphism is an isomorphism, since if $\sigma \in S$ leaves the tangent space elementwise invariant, it leaves geodesics through O pointwise invariant, and hence (V being connected) the fixpoints of σ include all V, as in the case of $\sigma\tau^{-1}$ discussed in § 1.

Further, since ds^2 is a positive definite quadratic form, we can find coordinates such that $ds^2 = \sum dx_i^2$ at O. Hence S is isomorphic with a subgroup of the orthogonal group on the tangent space at O. Hence S is at most a $\frac{1}{2}n(n-1)$-parameter group, equality holding only if this subgroup is the orthogonal group on n variables. Combining with our earlier inequality, we have the following result.

Theorem 2. The group G of all rigid motions of a connected n-dimensional Riemannian space V has at most $\frac{1}{2}n(n+1)$-parameters. Equality holds only if G is transitive and $V = G/S$, where S is equivalent, as a linear group on the tangent space at O, to the orthogonal group on n variables [5]).

To reduce the Riemann-Helmholtz problem to a problem concerning Lie groups, the following result is useful.

Lemma 1. Let $V = G/S$ and V' be homogeneous n-dimensional Riemannian varieties, having equivalent $\frac{1}{2}n(n+1)$-parameter groups G and G' of rigid motions. Then there exists a similarity transformation of V onto V', which multiplies all distances by the same factor $c > 0$.

Proof. Let Φ be the one one correspondence under which V and V' have „equivalent" groups of rigid motions, and let θ be the corresponding isomorphism $G \longleftrightarrow G'$; let S' be $\theta(S)$; then $V' = G'/S'$. By Theorem 2, the rigid motions of V and V' are *transitive* on directions in any tangent space. Since G and G' are transitive on points, they are transitive on line element directions. But they preserve the ratio ds'/ds of distance differentials of corresponding line elements. Hence $ds'/ds = \text{const}$, as stated, q. e. d.

The preceding results (§§ 2—3) have the following consequence. *If* every $\frac{1}{2}n(n+1)$-parameter group of rigid motions of any n-dimensional Riemannian space V, which contains the orthogonal group on n variables as a subgroup, is *locally* isomorphic with the group of rigid motions of one of the three classical geometries (2)—(3)—(4), then, in Theorem 2, V must be *similar in the large* to one of the four classical geometries (2)—(3)—(3')—(4).

We shall now prove the hypothesis of the preceding statement, in §§ 4—5, as an *extension problem in Lie algebra.*

---

[5]) Incidentally, it is sufficient to assume that V is a Finsler space. The subgroup of stability operates transitively on the tangent space at 0, and is compact; hence it is equivalent to the orthogonal group, and $ds^2 = \sum g_{ij}(x^\rightarrow)\,dx_i\,dx_j$.

§ 4.

Statement of extension problem.

Consider the problem of determining all $(m+n)$-parameter LIE groups G which contain a given m-parameter subgroup S, *in which the derivations of the LIE algebra A of G induced by the LIE algebra X of S are known.* (We recall that, by LIE's Second Fundamental Theorem, A contains X as a subalgebra.)

The hypothesis italicized is fulfilled in various important cases, notably when *all linear representations of S are completely reducible*, and *all irreducible representations of S are known.* This is the case if S is locally the direct sum of orthogonal, unitary, or real or complex unimodular groups ([2], pp. 266—7).

Since the representation of S by the adjoint of A is completely reducible, we can write A as the direct sum of irreducible subspaces (not usually subalgebras)

$$A = X + T = X + \Sigma_1 + \cdots + \Sigma_p. \tag{5}$$

Hence we can find a basis $x_1, \ldots, x_m; t_1, \ldots, t_n$ for A, such that the x_i are a basis for X, and the bases of the Σ_i are disjoint subsets of the t_j. (So far, what we have done works if S contains a compact invariant subgroup.) To determine the Σ_i, we enumerate the irreducible representations of S of sufficiently low degree (they are finite in number), and all direct sums of such representations having the degree n. For each such direct sum, we can then write down the commutation relations

$$[x_i x_j] = \beta_{ij}^r x_r \tag{6}$$

for the LIE subalgebra X, and also, knowing how S is represented on the Σ_i, those

$$[x_i t_j] = \gamma_{ij}^q t_q \tag{7}$$

connecting X and T. It remains, therefore, to find all those commutation relations

$$[t_i t_j] = \lambda_{ij}^r x_r + \mu_{ij}^q t_q \tag{8}$$

such that the four sets of structure constants β_{ij}^r, γ_{ij}^q, λ_{ij}^r and μ_{ij}^q make A a LIE algebra. Since $[a\,b] = -[b\,a]$, it suffices to consider the case $i < j$ in (8).

Not all cases need be considered, if S is known in the large. Thus let C be the covering group of S, so that $S = C/D$, where D is a discrete subgroup of the center of S. Then, in the adjoint representation (7) of C on T, D must be mapped on the identity.

Conversely, by LIE's Third Fundamental Theorem in the large (as proved by E. CARTAN), any LIE algebra (6)—(7)—(8) satisfying the conditions of the preceding paragraph, will give an extension G of S

having the required number of parameters. This reduces the extension problem to a pure problem in LIE algebra.

It is well-known that, for a set of anti-symmetric structure constants to define a LIE-algebra, it is necessary and sufficient that all distinct triples of basis elements satisfy the JACOBI identity

$$(9) \qquad \sum_{(ijk)} [[u_i u_j] u_k] = [[u_i u_j] u_k] + [[u_j u_k] u_i] + [[u_k u_i] u_j] = 0.$$

(Here and below, $\sum_{(ijk)}$ means summation with respect to the cyclic permutations ijk, jki and kij.) Since X is a LIE algebra, (9) is fulfilled automatically for x_i, x_j and x_k. Since we consider only *representations* of X on T, and since $\sum_{(ijk)} [[t_i x_j] x_k] = 0$ is equivalent to

$$[t_i [x_j x_k]] = [[t_i x_j] x_k] - [[t_i x_k] x_j],$$

the identity (9) is also fulfilled in case two of the three variables come from X.

Hence it is necessary and sufficient that the following vector equations be satisfied

$$(10) \qquad \sum_{(ijk)} [[t_i t_j] x_k] = 0 \quad \text{for all } i<j \text{ and } k,$$

$$(10') \qquad \sum_{(ijk)} [[t_i t_j] t_k] = 0 \quad \text{for all } i<j<k.$$

Expanding and equating components, equations (5) are equivalent to the two sets of homogeneous linear equations,

$$(11) \qquad \beta^r_{hk} \lambda^h_{ij} + \gamma^h_{jk} \lambda^r_{hi} + \gamma^h_{ki} \lambda^r_{hj} = 0.$$

$$(12) \qquad \gamma^q_{hk} \mu^h_{ij} + \gamma^k_{hj} \mu^q_{ki} + \gamma^k_{hi} \mu^q_{jk} = 0.$$

(The usual tensor summation convention is used.) Similarly, equations (5) are equivalent to the *quadratic* equations

$$(11') \qquad \sum_{(ijk)} \lambda^r_{lk} \mu^l_{ij} = 0 \quad \text{for all } i<j<k \text{ and all } p,$$

$$(12') \qquad \sum_{(ijk)} \{\mu^l_{ij} \mu^q_{lk} + \gamma^q_{hk} \lambda^h_{ij}\} = 0.$$

We thus obtain our basic theoretical result.

Theorem 3. All the $(m+n)$-parameter extensions of an m-parameter LIE group whose linear representations are known, can be found by solving the equations (11)—(12)—(11')—(12').

§ 5.

Solution in case of Riemann-Helmholtz problem.

Now consider the special case of the RIEMANN-HELMHOLTZ problem, in which $m = \frac{1}{2} n (n-1)$. We let $r_{ij} (i \neq j)$ denote the infinitesimal

rigid rotation which carries dx_i into dx_j, dx_j into $-dx_i$, and every $dx_k [k \neq i, j]$ into 0. Then $r_{ji} = -r_{ij}$, while

$$[r_{ik}, r_{kj}] = r_{ij} \quad \text{if } i \neq j, \text{ and} \tag{13}$$

$$[r_{ik}, r_{hj}] = 0 \quad \text{if } i, k \neq h, j.$$

Moreover the r_{ij} with $i < j$ form a basis for the Lie subalgebra X of S; it is the usual basis for the orthogonal group.

Clearly the conditions of § 4 are fulfilled; the subspace T of (5) may be called the set of *infinitesimal translations;* it is unique unless $n = 3$, as we shall see later. The elements of T correspond one-one to the tangent vectors at 0 (since S is the subgroup of stability of 0). Hence, under inner automorphisms induced by the subgroup S of rotations, T is transformed correspondingly by the commutation relations

$$[t_i, r_{ij}] = t_j \quad [t_j, r_{ji}] = -t_i \quad [i \neq j] \tag{14}$$

$$[t_k, r_{ij}] = 0 \quad \text{if } k \neq i, j.$$

(Equations (14) also follow abstractly, since they give the only non-trivial representation of the orthogonal group on n-space, while the trivial representation $[t, r] = 0$ for all $t \in T$, $r \in X$ would make S a *normal* subgroup, hence 0 a fixpoint for G, contrary to hypothesis.)

Theorem 4. From (13)—(14), and the laws of Lie algebra (as expressed in Theorem 3), it follows that also

$$[t_i, t_j] = \lambda r_{ij}, \quad \text{where } \lambda = 0, 1 \text{ or } -1, \tag{15}$$

provided a suitable basis is used for A.

Proof. We first derive the convenient identities

$$[[t_i t_j] r_{ij}] = 0 \quad \text{if } i \neq j, \tag{16}$$

and

$$[[t_i t_j] r_{jk}] = [t_i t_k] \tag{17}$$

if i, j, k are distinct. Ad (16), we combine the Jacobi identity with (14), to get

$$0 = [[t_i t_j] r_{ij}] + [[t_j r_{ij}] t_i] + [[r_{ij} t_i] t_j]$$

$$= [[t_i t_j] r_{ij}] + [-t_i, t_i] + [-t_j, t_j] = [[t_i t_j] r_{ij}],$$

since $[a, a] = 0$ and $[a, b] + [b, a] = 0$ in any Lie algebra. Ad (17), we compute similarly,

$$0 = [[t_i t_j] r_{jk}] + [[t_j r_{jk}] t_i] + [[r_{jk} t_i] t_j]$$

$$= [[t_i t_j] r_{jk}] + [t_k t_i] + 0 = [[t_i t_j] r_{jk}] - [t_i t_k].$$

Now observe, by (13) and (14), that the T-component of $[a, r_{jk}]$ is, for any $a \in A$, a linear combination of t_j and t_k. Hence, by (17), so is the T-component of $[t_i t_k]$. Repeating the argument, with i and k inter-

changed, the T-component of $[t_i t_k] = -[t_k t_i]$ must also be a linear combination of t_j and t_i. Combining, we have

(18) if $n \geqq 3$ (so that $j \neq i, k$ exists), the T-component of $[t_i t_k]$ is αt_j for any $j \neq i, k$.

From (18) one sees immediately

(18′) if $n \geqq 4$, then $[t_i t_k] \in X$.

(That is, in (8), all μ_{ij}^q are zero, if $n \geqq 4$.) But without using (18′), we can handle the case $n \leqq 3$.

Case $n = 2$. By (13)—(14), we have

$$[\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2 + \beta r_{12}, r_{12}] = \alpha_1 t_2 - \alpha_2 t_1,$$

for any $a = \alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2 + \beta r_{12}$ in A. Hence $[a, r_{12}] = 0$ implies $a = \beta r_{12}$. Combining with (16), we get

(15. 2) $[t_1 t_2] = \lambda r_{12}$ for some constant $\lambda = \beta$.

So much for the case $n = 2$; for the other cases, the following result (which can be proved by LIE algebra directly), is helpful.

Lemma 2. Any even permutation of subscripts of the t_i and r_{ij}, corresponds to an automorphism of A.

Proof. Consider the inner automorphisms of A induced by elements of S. We know by (13)—(14) that they are equivalent as linear transformations to the inner automorphisms of the Euclidean group induced by rigid rotations — and any even permutation of axes (hence of subscripts in the associated inner automorphism) can be induced by a rigid rotation.

Remark. In general, the statement that the relations (8) are invariant under all linear transformations of A induced by elements of S, is equivalent to stating that equations (10) are satisfied.

Case $n = 3$. By (13)—(14) again, we have

$$[a, r_{12}] = \alpha_1 t_2 - \alpha_2 t_1 - \beta_1 r_{23} + \beta_2 r_{23},$$

for any $a = \alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2 + \alpha_3 t_3 + \beta_1 r_{23} + \beta_2 r_{31} + \beta_3 r_{12}$ in A. Hence $[a, r_{12}] = 0$ implies $a = \alpha_3 t_3 + \beta_3 r_{12}$. Combining with (16), we get

(19) $$[t_1 t_2] = \alpha_3 t_3 + \beta_3 r_{12}.$$

Combining with Lemma 2, for cyclic permutations of the subscripts, we get (with subscripts modulo 3),

(20) $$[t_i, t_{i+1}] = \alpha t_{i+2} + \beta r_{i, i+1} \quad [i = 1, 2, 3].$$

It may be easily be verified that (13)—(14) and (20) are the generating relations for the Euclidean group, if rotations about the axis and screw motions of pitch $-\alpha/2$ are used for basis-elements. (In case $n = 3$, the decomposition of A into complementary subspaces X and

T is not unique, because the rotations are represented equivalently on the subspace of rotation-vectors and on the subspace of translation-vectors.) Introducing the new basis-elements

$$s_1 = t_1 + \gamma r_{23}, \quad s_2 = t_2 + \gamma r_{31}, \quad s_3 = t_3 + \gamma r_{12},$$

we get by straight-forward substitution from (2), if $\gamma = \alpha/2$,

$$[s_i, r_{ij}] = r_j \text{ and } [s_i, s_j] = \lambda r_{ij}, \tag{15.3}$$

where $\lambda = \beta - \alpha^2/4$. This covers the case $n = 3$.

Case $n \geqq 4$. Consider the X-component of $[t_i t_k]$, which equals $[t_i t_k]$ by (18'). By (13)—(14), the X-component of $[a, r_{23}]$ is, for any $a \in A$, a linear combination of basis-elements r_{2h} and $r_{3h} = -r_{h3}$. Hence, using (17),

$$[t_1 t_3] = [[t_1 t_2] r_{23}] = \alpha_h r_{2h} + \beta_h r_{3h}$$

is a linear combination of r_{ij} *other* than $r_{14} = -r_{41}$. Repeating the argument with 2 replaced by 4, and/or 1 by 3, we see that r_{12}, r_{34}, and r_{33} are not involved either. Hence

$$[t_1 t_3] = \lambda r_{13} + \mu r_{24}. \tag{21}$$

By Lemma 2, similar formulas hold for the other $[t_i, t_j]$. In fact, if $n \geqq 5$, we can infer $[t_1 t_3] = \lambda r_{13} + \mu r_{45}$ by applying the permutation (245) to the subscripts of (21). Combining with (21), we get $[t_1 t_3] = \lambda r_{13}$. Using Lemma 2 again, we can prove Thm. 4,

$$[t_i t_j] = \lambda r_{ij} \quad \text{if } n \geqq 5. \tag{15.5}$$

In case $n = 4$, the argument is less direct. We have, applying the permutations (123) and (132) to the subscripts of (21), as justified by Lemma 2,

$$[t_1 t_2] = \lambda r_{12} + \mu r_{43}, \quad [t_2 t_3] = \lambda r_{23} + \mu r_{41}. \tag{21'}$$

By direct substitution from (21)—(21') and (14), we infer

$$0 = [[t_1 t_2] t_3] + [[t_2 t_3] t_1] + [[t_3 t_1] t_2] = 3\mu t_4.$$

Hence $\mu = 0$ and (15.5) is valid even if $n = 4$.

We have thus proved Theorem 4, except for showing that $\lambda = 0$, 1, or -1. But this follows easily: unless $\lambda = 0$ (the Euclidean case), the new basis elements $t_i' = t_i/|\lambda|^{1/2}$ make $\lambda = \pm 1$ in (15), and leave (13) and (14) unchanged.

§ 6.

Final conclusions.

But now, the three LIE algebras of Theorem 4 are isomorphic with those of the three classical geometries, as can easily be verified. Hence,

by LIE's Third Fundamental Theorem, the corresponding LIE groups are locally isomorphic. Hence, by the statement at the end of § 3, we have our final result, first proved locally by LIE.

Theorem 5. The group of rigid motions of a connected, n-dimensional RIEMANNian space has at most $\frac{1}{2}n(n+1)$ parameters. Equality holds only in the four classical cases of Euclidean, spherical, elliptic, and hyperbolic geometry.

Clearly, for the hypotheses of Theorem 5 to be satisfied in a connected RIEMANNian space (or strictly convex FINSLER space), it is sufficient that every isometry between two pairs of points be extensible to the whole space — i. e., that the space have the free mobility property[6]) for sets of 2 points. Hence any such space must be Euclidean, spherical, elliptic, or hyperbolic.

Using the methods of §§ 4—5, one can also solve a considerable variety of other problems. Thus one can enumerate all homogeneous three-dimensional RIEMANNian spaces (to be published elsewhere), and one can find all ten-parameter groups which contain the Euclidean group as a six-parameter subgroup (result of A. GLEASON).

[6]) See G. BIRKHOFF, "Metric foundations of geometry", Trans. Am. Math. Soc. **55** (1944), 465—492; or H. BUSEMANN, "Metric methods in Finsler spaces", Princeton, 1942.

Literature.

C. CHEVALLEY,

[1] "Theory of LIE groups", Princeton, 1946.

H. WEYL.

[2] "The classical groups", Princeton, 1939.

(Eingegangen am 1. April 1950.)

Mathematische Zeitschrift, Band 53, Heft 3, S. 236—243 (1950).

Eine Verallgemeinerung des Pentagramma Mirificum.

Herrn Erich Kamke zum 60. Geburtstag am 18. August 1950 gewidmet.

Von

Frank Löbell in München.

Es ist bekannt, welch großes Interesse Gauss dem *pentagramma mirificum* schenkte — dem sphärischen Fünfeck, dessen fünf Diagonalen Quadranten sind[1]) —, das in so merkwürdigem Zusammenhang mit dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck und der Neperschen Regel steht.

Diese Fünfecke lassen sich nun mit einer Art von Raumgebilden in Verbindung bringen, die man zu den Grundfiguren der Geometrie rechnen muß: Jedes derartige Pentagramm bestimmt nämlich fünf Durchmesser seiner Trägerkugel, die sich zyklisch so anordnen lassen, daß jeder auf dem vorhergehenden senkrecht steht; ein solches Fünfkant aber läßt sich als Sonderfall eines räumlichen Fünfseits ansehen, dessen benachbarte Seiten sich senkrecht schneiden oder, wie wir mit einem Wort sagen wollen, sich „kreuzen", ohne alle durch einen Punkt zu laufen.

Auch von einem anderen Standpunkt aus kann man zu dieser Begriffserweiterung kommen: Wenn man die Kugelfläche als zweiseitige Überlagerungsfläche der elliptischen Ebene betrachtet, ist die Spur des besagten Pentagramms ein in dieser Ebene liegendes rechtwinkliges Fünfseit.

Unter jedem dieser Gesichtspunkte erweist sich das räumliche *rechtwinklige Fünfeck* als Verallgemeinerung des pentagramma mirificum. Diese ist jedoch durchaus nicht auf bestimmte metrische Geometrien beschränkt, sie ist vielmehr in allen Räumen konstanter Krümmung in gleicher Weise sinnvoll; denn in jedem dieser Räume kann man alle erdenklichen Fünfseite dieser Art nach folgender Anweisung gewinnen:

---

[1]) C. F. Gauss, Werke III, p. 481—490. Mit den Worten des Textes kennzeichnet Schering das pentagramma mirificum dort auf S. 495; man erkennt leicht, daß jedes solche Fünfeck zu sich selbst als Fünfseit sphärisch polar ist, und daß sich je zwei getrennte seiner Seiten, nötigenfalls verlängert, in den sphärischen Polen seiner Diagonalen unter rechten Winkeln schneiden. Siehe auch Gauss' Werke VIII, p. 106 ff., mit Bemerkungen von Fricke p. 112 ff.

Man konstruiere zu einer Geraden eine sie treffende Senkrechte, zu dieser noch eine solche, zur dritten wieder eine sie senkrecht schneidende; zur ersten und letzten gibt es dann stets mindestens ein gemeinsames Lot, d. h. eine sie beide kreuzende Gerade, die die Reihe zu einem i. allg. windschiefen Fünfeck schließt. Damit diese Aussage ausnahmslos gelte, müssen wir von zwei zueinander asymptotischen Geraden des hyperbolischen Raumes sagen, daß sie eine die absolute Fläche berührende Gerade als gemeinsames Lot besitzen; in diesem Sinn kann es dort bei einer Seite oder bei zwei nicht benachbarten Seiten eines rechtwinkligen Fünfecks vorkommen, daß sie zusammenfallende unendlichferne Punkte oder „Enden" haben. Wir wollen auch zulassen, daß verschiedene, natürlich nicht benachbarte Fünfeckskanten in Deckung liegen können. — Es sei ausdrücklich bemerkt, daß wir in dieser Arbeit nur von reellen Geraden und Enden sprechen.

Im hyperbolischen Raum besitzen bekanntlich zwei eigentliche, nicht asymptotische Gerade stets ein und nur ein eigentliches gemeinsames Lot, außerdem aber genau ein uneigentliches; diese beiden Lote sind einander in der absoluten Polarität zugeordnet. Im elliptischen Raum haben zwei Gerade i. allg. zwei gemeinsame Lote, die, wie alle Geraden, eigentlich sind; hier kann es aber, wie im euklidischen Raum, auch vorkommen, daß zwei verschiedene Gerade unendlich viele gemeinsame Lote besitzen, wenn sie nämlich im Cliffordschen Sinn parallel sind.

1. Das im vorstehenden Gesagte zeigt, daß auf diesem Gebiet *im hyperbolischen Raum* besonders einfache Verhältnisse vorliegen, so daß zu erwarten ist, daß in ihm eine besonders übersichtliche Behandlung des rechtwinkligen Fünfseits möglich sein wird; so wollen wir denn im folgenden diese Figur hauptsächlich in diesem Raum studieren[2]).

Der Betrachtung soll die Darstellung der eigentlichen Geraden und der unendlich fernen Punkte des hyperbolischen Raumes durch die binären quadratischen Formen mit komplexen Koeffizienten zugrunde gelegt werden, die auf F. Klein zurückgeht und erst kürzlich nach der Seite ihrer Analogie zur gewöhnlichen Vektorrechnung untersucht wurde[3]). Damit aber die Zuordnung der eigentlichen Geraden zu den

[2]) Damit werden ältere Betrachtungen wieder aufgenommen, die d. V. im Frühjahr 1931 im Mathematischen Kolloquium der Technischen Hochschule Stuttgart vortrug und die unter dem Titel „Das rechtwinklige Fünfseit als Grundfigur der Trigonometrie" veröffentlicht wurden in der Zeitschrift „Aus Unterricht und Forschung", Bd. 5, (Stuttgart 1933), S. 112 ff. und S. 161 ff. Dort wird nicht mit Formen gearbeitet, sondern es werden als Koordinaten für die gerichteten eigentlichen Geraden, die „Speere" in der Sprechweise Studys, geordnete Paare komplexer Zahlen benutzt.

[3]) In d. V. Arbeit: Eine reelle Deutung der komplexen Vektoren. Mathematische Zeitschrift Bd. 53, S. 759 ff. (1950). Dort wird auch auf die einschlägigen Arbeiten von E. Study und H. Beck hingewiesen.

Formen g nicht unendlich vieldeutig sei, sollen diese durch Division durch eine Quadratwurzel aus ihrer Invariante (g, g), die ja nur bei den durch die singulären Formen dargestellten Enden verschwindet, so normiert werden, daß das Quadrat ihrer komplexen „Länge" den Wert 1 bekommt; wir wollen, mit anderen Worten, die nicht zu Enden entarteten Geraden durch die „Einheitsformen" als komplexe „Einheitsvektoren" oder „Einheitsschrauben" darstellen. Für das komplexe „Maß" γ zweier, solchen Formen g und h entsprechenden Geraden — kurz der Geraden g und h — gilt dann wegen $(g, g) = (h, h) = 1$

$$\cos \gamma = (g, h). \tag{1}$$

Eigentlich ist hier das Vorzeichen des rechts stehenden „skalaren Produktes" nicht bestimmt, weil die Formenkoeffizienten durch die oben vereinbarte Normierung nur bis auf den Faktor ± 1 bestimmt sind, jedoch können wir den Wert von γ durch die Gleichung (1) bis auf sein Zeichen mod 2π festlegen; dies deutet darauf hin, daß die Geraden durch Festlegung der Werte der Koeffizienten sogar mit einem Richtungssinn versehen werden können. In der Tat wird es sich zeigen, daß wir dies für eine gewisse Menge von Geraden erreichen können, wenn wir die Richtungssinne bei zwei nicht linear abhängigen unter ihnen festgesetzt haben.

Wir wollen uns nämlich etwas genauer mit der Lagebeziehung befassen, in der die Geraden $\mu g + \nu h$, wo μ und ν beliebige komplexe Zahlen bedeuten, zu den Geraden g und h stehen. Da allgemein

$$(\mu g + \nu h, l) = \mu (g, l) + \nu (h, l) \tag{2}$$

ist, so sehen wir: Eine Gerade l, die sowohl g als auch h senkrecht schneidet, so daß $(g, l) = (h, l) = 0$ ist, wird auch die Gerade $\mu g + \nu h$ senkrecht schneiden. Umgekehrt muß, wenn g und h nicht in Deckung liegen, also ihr „Vektorprodukt" $[g, h] \neq 0$ ist, jeder das gemeinsame Lot $[g, h]$ von g und h unter rechtem Winkel treffenden Geraden eine Form

$$f = \mu g + \nu h$$

entsprechen; dies erkennt man sofort, wenn man die Gleichungen $(g, l) = 0$ und $(h, l) = 0$ auf Grund der an der oben genannten Stelle gegebenen Definition des Skalarproduktes explizit niederschreibt.

Wenn g und h selbst zwei Gerade sind, die sich kreuzen, so erhalten die Koeffizienten μ und ν besonders einfache Bedeutungen: Wegen $(g, h) = 0$ folgt nämlich alsdann

$$\mu = (f, g), \quad \nu = (f, h).$$

Wenn wir das Maß von g und f mit φ bezeichnen und bedenken, daß dasjenige von h und f wegen der additiven Eigenschaft der Maßfunktion die Größe $\varphi - \frac{\pi}{2}$ hat, falls die als gerichtet angesehenen Geraden

g, h und l einen rechtshändig orientierten Dreistrahl bilden, so finden wir

$$\mu = \cos\varphi, \quad \nu = \sin\varphi;$$

in Übereinstimmung damit ergibt sich durch zweimalige Anwendung von (2)[4])

$$(3) \qquad (f, f) = \mu^2 (g, g) + 2\,\mu\,\nu (g, h) + \nu^2 (h, h) = \mu^2 + \nu^2 = 1.$$

Auch die Gerade f ist also jetzt durch die Form

$$(4) \qquad f = g\cos\varphi + h\sin\varphi$$

als eine orientierte dargestellt, wie es oben in Aussicht gestellt wurde, da φ auch im Komplexen durch die Werte von $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ eindeutig mod 2π bestimmt ist.

2. Jetzt wollen wir zur *Betrachtung des rechtwinkligen Fünfecks* übergehen. So nennen wir, wie schon gesagt, einen Zyklus von fünf eigentlichen Geraden g_j ($j = 1, 2, 3, 4, 5$)[5]), von denen jede die vorhergehende und daher auch die folgende kreuzt. Wir machen uns klar, daß im hyperbolischen Raum die fünf Geraden, sofern nicht zwei nichtbenachbarte unter ihnen in Deckung liegen, keinesfalls mehr als fünf eigentliche Schnittpunkte haben können, auch dann nicht, wenn es sich um ein ebenes Fünfseit handelt.

Zunächst sollen die am Anfang erwähnten Sonderfälle, in denen einzelne der Geraden die absolute Fläche berühren, ausgeschlossen sein; schon hier sei aber darauf hingewiesen, daß die Beziehungen, die sich ergeben werden, auch für diese Ausartungen gültig bleiben, wobei sie allerdings zum Teil trivial werden, was man sich im einzelnen überlegen muß.

Vorerst denken wir uns jede der fünf Geraden g_j so gerichtet, daß das von ihnen gebildete Fünfkant einen bestimmten Umlaufsinn erhält.

Wir bezeichnen das Maß der beiden Geraden g_{j-1} und g_{j+1} — die Indizes mögen auf die Klasse der kleinsten positiven Reste mod 5 reduziert gedacht werden — mit γ_j; die fünf komplexen Zahlen γ_j nennen wir die „*Stücke*" des rechtwinkligen Fünfecks.

Man kann sich durch anschauliche Überlegungen davon überzeugen, daß ein solches Fünfseit i. allg., d. h. mit einigen Ausnahmen, die später genannt werden sollen, durch die Angabe der Größen von zwei seiner Stücke bestimmt ist; da diese entweder benachbart oder

---

[4]) Man beachte, daß hier eine Verallgemeinerung des Kosinussatzes der ebenen Trigonometrie vorliegt, sofern man $(g, h) = \cos\gamma$ als eines beliebigen Wertes fähig annimmt.

[5]) Die Indizes dienen hier also nicht wie in der in Fußnote [3]) angeführten Arbeit zur Kennzeichnung der Formenkoeffizienten, sondern zur Unterscheidung der verschiedenen Formen selbst.

zugleich auf der einen Seite durch ein Zwischenstück, auf der andern durch zwei Zwischenstücke getrennt sind, so können wir das Bestehen von zwei Arten grundlegender Beziehungen erwarten. Um diese zu gewinnen, führen wir die gemeinsamen Lote l_j der Paare von Nachbargeraden g_{j-2}, g_{j+2} ein, und zwar je mit einer solchen Richtung, daß die Tripel g_{j+2}, g_{j-2}, l_j rechtshändig orientiert sind. Dann gilt vermöge (4)

(5′) $$g_{j-1} = g_{j+2} \cos \gamma_{j-2} - l_j \sin \gamma_{j-2}$$

und

(5″) $$g_{j+1} = g_{j-2} \cos \gamma_{j+2} - l_j \sin \gamma_{j+2}.$$

Hieraus folgt wegen $(g_{j+2}, g_{j-2}) = 0$, $(g_{j+2}, l_j) = 0$, $(g_{j-2}, l_j) = 0$

$$(g_{j-1}, g_{j+1}) = (l_j, l_j) \sin \gamma_{j-2} \sin \gamma_{j+2},$$

also wegen $(l_j, l_j) = 1$ nach (1)

(6) $$\underline{\cos \gamma_j = \sin \gamma_{j+2} \sin \gamma_{j-2}}.$$

Behandeln wir die beiden, ebenfalls unmittelbar aus (4) fließenden Gleichungen

(7′) $$g_{j-2} = g_j \cos \gamma_{j-1} - l_{j+2} \sin \gamma_{j-1}$$

und

(7″) $$g_{j+2} = g_j \cos \gamma_{j+1} - l_{j-2} \sin \gamma_{j+1}$$

ebenso, so finden wir

$$0 = \cos \gamma_{j-1} \cos \gamma_{j+1} + (l_{j+2}, l_{j-2}) \sin \gamma_{j-1} \sin \gamma_{j+1};$$

berücksichtigen wir, daß $(l_{j+2}, l_{j-2}) = -\cos \gamma_j$ ist, weil das Maß von l_{j+2} und l_{j-2} sich von dem von g_{j-1} und g_{j+1} um die Größe π unterscheidet, so erhalten wir

(8) $$\underline{\cos \gamma_j = \operatorname{cotg} \gamma_{j-1} \operatorname{cotg} \gamma_{j+1}}.$$

Es ist aber zu beachten, daß dies sinnlos wird, wenn g_j mit einer anderen Fünfeckseite, etwa g_{j+2}, in Deckung liegt, weil alsdann $\sin \gamma_{j+1} = 0$ und $\cos \gamma_{j-1} = 0$ wird, so daß auch aus der (8) vorausgehenden Beziehung, die jetzt identisch erfüllt ist, $\cos \gamma_j$ nicht bestimmt werden kann; in der Tat ist in diesem Fall jeder Wert von γ_j möglich, weil dann die Gestalt des Fünfseits durch die Angaben von γ_{j-1} und γ_{j+1} nicht völlig festgelegt ist[6]).

Die Gleichung (8) könnte auch aus zwei geeignet ausgewählten der Gleichungen (6) rein rechnerisch hergeleitet werden, und umgekehrt;

---

[6]) Aus $\gamma_j \equiv 0 \bmod \pi$ folgt sogar schon $\gamma_{j+2} \equiv \frac{\pi}{2}$ und $\gamma_{j-2} \equiv \frac{\pi}{2}$, aus $\gamma_j \equiv \frac{\pi}{2}$ aber entweder $\gamma_{j+2} \equiv 0$ und $\gamma_{j-1} \equiv \frac{\pi}{2}$ oder $\gamma_{j-2} \equiv 0$ und $\gamma_{j+1} \equiv \frac{\pi}{2} \bmod \pi$ oder beides zugleich.

d. h. alle zwischen den Stücken eines rechtwinkligen Fünfecks geltenden Relationen lassen sich aus einer einzigen von ihnen, teils durch zyklische Vertauschung der Stücke, teils durch Rechnung gewinnen.

Inwieweit hängen nun die gewonnenen Ergebnisse von der oben vorgenommenen Orientierung der Kanten des Fünfecks ab, durch die dieses einen einheitlichen Umlaufsinn erhielt? Es wird sich zeigen, daß es gar nicht nötig ist, daran festzuhalten. Kehrt man nämlich die Richtung einer der Geraden, etwa g_j, um, so wird infolge davon γ_j sein Vorzeichen wechseln, während γ_{j-1} und γ_{j+1} je den Zuwachs $\pm\pi$ erhalten; dadurch wechseln $\cos\gamma_{j-1}$, $\cos\gamma_{j+1}$, $\sin\gamma_{j-1}$, $\sin\gamma_{j+1}$ und $\sin\gamma_j$ ihre Zeichen. Die Beziehungen (6) und (8) bleiben jedoch alle zehn unverändert bestehen.

Prüfen wir ihre Gültigkeit noch in den früher erwähnten Fällen, in denen die Imaginärteile einzelner Stücke unendlich groß werden, so können wir unsere Resultate in dem Satze zusammenfassen[7]):

In jedem rechtwinkligen Fünfseit ist der Kosinus jedes Stückes gleich dem Produkt der Sinus der gegenüberliegenden Stücke und gleich dem der Kotangenten der Nachbarstücke.

3. Es braucht wohl kaum ausgesprochen zu werden, daß diese Aussage die *Neper-Engelsche Regel* der hyperbolischen Trigonometrie enthält, so zwar, daß sie hier von dem ihr üblicherweise anhaftenden, rein formalen Charakter völlig befreit erscheint. Denn jedes rechtwinklige Dreieck des hyperbolischen Raumes mit drei eigentlichen Ecken wird durch Hinzunahme der Lote seiner Ebene in den Scheiteln der spitzen Innenwinkel zu einem rechtwinkligen Fünfkant. Diese Betrachtungsmöglichkeit bleibt aber nicht auf den Fall der eigentlichen Dreiecke beschränkt; ihr fügen sich vielmehr auch die rechtwinkligen Dreiecke mit einer oder mit zwei uneigentlichen Ecken ein, wobei jede solche mit dem gemeinsamen Lot der durch sie gehenden Seiten versehen zu denken ist; bei den ersteren, den sog. Spitzecken, ist das Ebenenlot im Scheitel des spitzen Winkels als Kante des Fünfecks hinzuzunehmen, die letzteren sind ohne weitere Zutat ebene rechtwinklige Fünfecke[8]).

Unser Satz deckt aber auch das Wesen der bekannten *Neperschen Regel* der sphärischen Trigonometrie auf. Dieses wird ja durch die

---

[7]) Dieser Satz findet sich schon auf S. 162 der in Fußnote [2]) dieser Arbeit angeführten Abhandlung d. V. Vergl. Gauss, Werke III, p. 482.

[8]) Siehe H. Liebmann, Nichteuklidische Geometrie, Berlin und Leipzig 1912, S. 37 u. 40 (3. Aufl. 1923, S. 32 u. 36, 59 ff. u. 105 f.).

Engel und Stäckel, Urkunden zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie I. S. 346 f.

Roeser, Das rechtwinklige Fünfeck der hyperbolischen Ebene und die Engel-Japiersche Regel. Crelles Journal 154 (1925), S. 151 ff.

Mohrmann, Einführung in die nichteuklidische Geometrie, Leipzig 1930, S. 71 ff.

Brües, Pentagramma mirificum und Nepersche Regel, Zeitschr. f. math. und naturwiss. Unterricht, 62 (1931), S. 17 f.

übliche Zuordnung eines pentagramma mirificum zum rechtwinkligen sphärischen Dreieck noch keineswegs völlig aufgehellt. Weiter führt schon die Feststellung, daß die Ecken dieses Pentagramms auf Kugeldurchmessern liegen, die — durch die Scheitel der nicht-rechten Winkel des Dreiecks gehend und auf den Ebenen der Dreieckseiten senkrecht stehend —, wie schon am Anfang dieser Arbeit erwähnt, ein rechtwinkliges Fünfkant bilden, dessen Stücke alle reell sind und mit denen des Dreiecks, d. h. dessen Seiten und Winkeln in der bekannten einfachen Weise zusammenhängen, so daß die Grundgleichungen (6) und (8) ohne weiteres in die Relationen zwischen den Stücken des rechtwinkligen sphärischen Dreiecks übergehen. Hierbei ist zu bedenken, daß die Maßbestimmung im Bündel in allen metrischen Räumen die gleiche, nämlich die elliptische ist. Auf die natürlichste Art gelangt man aber zur Neperschen Regel, wenn man das rechtwinklige sphärische Dreieck als kongruentes Bild eines rechtwinkligen Dreiecks einer elliptischen Ebene auffaßt; denn dieses läßt sich ungezwungen als Bestandteil eines rechtwinkligen Fünfseits im elliptischen Raum erkennen, zu dem es die Hinzufügung der beiden Lote zur Dreiecksebene in den Endpunkten der Hypotenuse ergänzt. Freilich muß man, um diesen Gedanken ganz durchführen zu können, die den Formeln (6) und (8) entsprechenden der elliptischen Trigonometrie besitzen; hier möge die Andeutung genügen, daß man sie gewinnen kann, wenn man in der für den Raum mit dem Krümmungsmaß $-1:R^2$ gebildeten Maßfunktion $\gamma = \bar{\gamma} + \frac{i}{R}\bar{\bar{\gamma}}$, wo $\bar{\gamma}$ einen Winkel, $\bar{\bar{\gamma}}$ eine Länge bedeutet, den Krümmungsradius R imaginär annimmt.

4. Ohne weiteres einleuchten wird aber, daß man aus den Gleichungen (6) und (8) die Grundgleichungen für die rechtwinkligen Fünfseite des euklidischen Raumes erhält, wenn man R unendlich groß werden läßt; entwickelt man vorher die in ihnen auftretenden analytischen Funktionen in Potenzreihen nach $1:R$, so wird man sehen, daß man alle zwischen den im Fünfeck vorkommenden Längen- und Winkelgrößen bestehenden Beziehungen schon bekommt, wenn man sich jeweils auf die beiden Glieder niedrigster Ordnung der Reihenentwicklungen beschränkt. Das läuft aber darauf hinaus, daß man die gewöhnliche imaginäre Einheit i durch die „duale" Einheit ε ersetzt, mit der nach der Vorschrift $\varepsilon^2 = 0$ mit $\varepsilon \neq 0$ zu rechnen ist[9]).

[9]) Siehe W. K. Clifford, Preliminary sketch of biquaternions. Proc. London Math. Soc. 4, p. 381—395 (1873). (Math. papers, p. 181—200. London 1882). E Study, Geometrie der Dynamen, Leipzig 1903, bes. S. 195 ff. W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie I. Berlin 1921, S. 190 ff. (4. Aufl. 1945, S. 261 ff.)

Eine Darstellung des Rechnens mit dualen Zahlen und Vektoren, in der auch bewiesen wird, daß es nicht zu Widersprüchen führen kann, findet sich in einem Beitrag d. V. zur Festschrift der Technischen Hochschule Stuttgart zur Vollendung ihres ersten Jahrhunderts, Berlin 1929, S. 210 ff.

Zum Schluß sei zur Herleitung der Beziehung (8) noch bemerkt: Wenn dort g_{j+2} und g_{j-2} nicht als zwei sich kreuzende Gerade angenommen werden, so daß $(g_{j+2}, g_{j-2}) \neq 0$ wird, wenn man also statt eines Fünfecks ein i. allg. windschiefes rechtwinkliges Sechseck betrachtet — dem F. KLEIN den Namen *„Doppelkern"* gegeben hat —, so erhält man eine von F. SCHILLING als erstem gefundene Verallgemeinerung des Kosinussatzes der Trigonometrie [10]). Anstelle der Gleichung (6) würde sich bei analoger Behandlung derselbe Satz ergeben. Aus ihm fließen alle Beziehungen, die für den Doppelkern, speziell das allgemeinste „Dreieck" der hyperbolischen Ebene gelten, rein rechnerisch ebenso, wie bekanntlich nach GAUSS aus dem ebenen und dem sphärischen Kosinussatz alle Formeln der ebenen bzw. sphärischen Trigonometrie folgen.

---

[10]) KLEIN hat den Doppelkern gelegentlich auch als „SCHILLINGsche Figur" bezeichnet; siehe seine Vorl. ü. die hypergeometrische Funktion, Berlin 1933, S. 189.

Die hierher gehörenden Arbeiten von SCHILLING sind in der in Fußnote [2]) dieser Arbeit angegebenen Abhandlung aufgezählt; inzwischen sind verschiedene Bücher dieses Autors erschienen, unter denen hier besonders zu nennen ist: Die Bewegungstheorie im nichteuklidischen hyperbolischen Raum, München 1948, II, bes. S. 220 ff.

(Eingegangen am 27. März 1950.)

Mathematische Zeitschrift, Band 53, Heft 3, S. 244—266 (1950).

Über Systeme hyperbolischer Differentialgleichungen erster Ordnung. I.

Herrn Erich Kamke zum 60. Geburtstag am 18. August 1950 gewidmet.

Von

Wolfgang Haack und Günter Hellwig in Berlin-Charlottenburg.

Einleitung.

In der Differentialgeometrie hat es sich als recht vorteilhaft erwiesen, bei der Untersuchung einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit nach Möglichkeit n unabhängige Linearformen (Pfaff'sche Formen) aufzustellen und dann ausschließlich invariante Ableitungen bezüglich der Pfaff'schen Formen an Stelle der gewöhnlichen partiellen Ableitungen zu verwenden[1]). Selbst bei der elementaren Flächentheorie ($n = 2$) hat sich das Verfahren bewährt. Im folgenden soll diese Methode auf ein System zweier linearer partieller Differentialgleichungen I. Ordnung mit zwei unbekannten Funktionen von zwei unabhängigen Veränderlichen angewandt werden.

$$\begin{aligned} &a^k u_k + b^k v_k + c\,u + d\,v + e = 0 \quad (\text{über } k \text{ summiert},\\ &\bar{a}^k u_k + \bar{b}^k v_k + \bar{c}\,u + \bar{d}\,v + \bar{e} = 0 \qquad\qquad k = 1, 2). \end{aligned} \tag{1}$$

Hier bedeuten u, v die gesuchten Funktionen, u_k, v_k die partiellen Ableitungen nach den unabhängigen Veränderlichen x^1, x^2 und a^k, $\bar{a}^k$, b^k ..... $\bar{e}$ eindeutige reelle Funktionen von den reellen Veränderlichen x^1, x^2.

Jede der Gleichungen (1) enthält je eine Richtungsdifferentiation für u und für v. Durch geeignete Linearkombination der beiden Gleichungen kann erreicht werden, daß diese vier Richtungen paarweise zusammenfallen. Das führt zu den Charakteristiken des Systems (1) und zur Kennzeichnung des hyperpolischen, parabolischen und elliptischen Falles. Wir beschränken uns auf die Untersuchung hyperbolischer Systeme. Die Erklärung der Charakteristiken durch das Zusammenfallen gewisser Ableitungsrichtungen wurde in den letzten zehn Jahren im Zusammenhang mit gasdynamischen Untersuchungen mehrfach angewandt. Herr R. Courant teilte in seinem Göttinger Vortrag 1948 ein Verfahren mit, das ebenfalls auf Richtungsableitungen

[1]) Vgl. etwa W. Blaschke: „Vorlesungen über Differentialgeometrie I“. Berlin 1945.

W. Haack: „Differentialgeometrie Teil II“. Wolfenbüttel und Hannover 1948.

aufbaut und dem unsrigen etwa bis zu der „Normalform" verwandt ist, jedoch ohne Bezugnahme auf die PFAFF'schen Formen[2]).

Im Abschnitt I werden die charakteristischen Richtungen und zwei dazugehörige lineare Differentialformen ω_1, ω_2 aufgestellt und die partiellen Ableitungen durch die invarianten Ableitungen bezüglich ω_1, ω_2 ersetzt. Führt man statt der Funktionen u, v geeignete Linearkombinationen U, V ein, so läßt sich das System (1) auf die Normalform

$$\begin{aligned} U_\alpha &= AU + BV + C \\ V_{\bar\alpha} &= \bar A U + \bar B V + \bar C \end{aligned} \tag{2}$$

bringen, in der die Indices α, $\bar\alpha$ die invarianten Ableitungen bezüglich ω_1, ω_2 bedeuten und A, $\bar A$, B .... $\bar C$ Funktionen von x^1, x^2 sind, die aus den Koeffizienten von (1) und deren Ableitungen gebildet werden. Man findet leicht Sonderfälle, in denen U, V durch Quadraturen bestimmt werden können. Denkt man eine lineare hyperbolische Differentialgleichung II. Ordnung als System in der Form (1) geschrieben und bildet die dazugehörige Normalform (2), so entspricht den quadrierbaren Fällen im Wesentlichen das Verschwinden der LAPLACE'schen Invarianten[3]).

Im Abschnitt II werden zunächst die Bedingungen aufgestellt, unter denen das CAUCHY'sche Anfangswertproblem für die Normalform (2) eindeutige und stetige Lösungen U, V besitzt, aus denen auf die Lösungen u, v von (1) geschlossen werden kann. Die Bedingungen für die Differenzierbarkeit von u, v werden gesondert angegeben. Im Zusammenhang damit wird untersucht, wie sich Unstetigkeiten, die längs der Anfangskurve gegeben sind, in das Innere des Bereiches fortpflanzen. Die Existenzbeweise werden mittels eines einfachen Iterationsverfahrens geführt, das gleichzeitig zur numerischen Berechnung des CAUCHY'schen Anfangswertproblems von (1) bzw. (2) brauchbar ist[4]).

---

[2]) Inzwischen sind folgende Veröffentlichungen erschienen:

COURANT-FRIEDRICHS: „Supersonic Flow And Shock Waves". New York 1948 (Kap. II).

FRIEDRICHS, K. O.: „Nonlinear hyperbolic differential equations for functions of two independent variables". Amer. J. Math. 70, S. 555—589 (1948).

COURANT and LAX: „On nonlinear partial differential equations with two independent variables". Pure And Applied Mathematics, Vol. II, 2—3 (S. 255—273).

[3]) Siehe G. DARBOUX: „Leçons sur la Théorie Générale des Surfaces, Paris 1889, Bd. 2 (Kap. II).

L. BIEBERBACH: „Theorie der Differentialgleichungen", Berlin 1930, S. 353.

[4]) Für Existenzsätze vergleiche man auch O. PERRON: „Über Existenz und Nichtexistenz von Integralen partieller Differentialgleichungssysteme im reellen Gebiet". Math. Zeitschr. Bd. 27 (1928).

W. A. HURWITZ: „Randwertaufgaben bei Systemen von linearen partiellen Differentialgleichungen I. Ordnung". Diss. Göttingen 1910

Ausgehend vom CAUCHY'schen Anfangswertproblem werden im Abschnitt III verschiedene gemischte Anfangs- und Randwertprobleme bzw. charakteristische Anfangswertprobleme untersucht und die Bedingungen für die eindeutige Lösung des Systems (1) zusammengestellt.

Nachdem hiermit die Grundlagen geschaffen und die wichtigsten Existenzsätze bewiesen sind, sollen in einer demnächst folgenden zweiten Mitteilung die zu zwei PFAFF'schen Formen gehörigen Integralsätze in Betracht gezogen werden. Dabei zeigt sich, daß das CAUCHY'sche Anfangswertproblem, welches U, V oder u, v längs einer beliebigen Kurve K vorgibt, zurückgeführt werden kann auf ein spezielles „charakteristisches Anfangswertproblem", das unabhängig von der Kurve K ist. Ist die Lösung dieses charakteristischen Anfangswertproblems bekannt, so ergibt sich die Lösung des CAUCHY'schen Anfangswertproblems für eine beliebige Anfangskurve K durch Quadraturen. Der Sachverhalt entspricht demjenigen, der unter dem Namen „RIEMANN'sche Methode" bei einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung bekannt ist. Das charakteristische Anfangswertproblem für die Normalform (2) folgt ebenso zwangsläufig wie bei der RIEMANN'schen Methode. Das Verfahren beruht auf der Bestimmung eines „quasi-RIEMANN'schen Funktionensystems" und stellt eine Verallgemeinerung der RIEMANN'schen Methode von hyperbolischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung auf Systeme von Differentialgleichungen dar[5]).

Die Überlegungen der Abschnitte I bis III lassen sich weitgehend auf quasilineare Systeme von Differentialgleichungen übertragen und führen, wie in der zweiten Mitteilung gezeigt wird, mittels Differenzenrechnung unmittelbar zur näherungsweisen Bestimmung der gesuchten Funktionen für alle in den Abschnitten II, III behandelten Anfangs- bzw. Randwertprobleme.

Abschnitt I.

Die Normalform zum System (1).

Ist $S(x^1, x^2)$ eine differenzierbare Funktion und sind α^i stetige Funktionen von x^1, x^2, so nennen wir

$$S_\alpha = \alpha^i S_i \equiv \alpha^1 \frac{\partial S}{\partial x^1} + \alpha^2 \frac{\partial S}{\partial x^2} \tag{I 1}$$

die Richtungsdifferentiation von S in Richtung α^i, bzw. die „invariante Ableitung" von S bezüglich des Vektors α^i. Danach sind in dem System

[5]) Eine Verallgemeinerung der RIEMANN'schen Methode in anderer Richtung siehe auch: F. RELLICH: „Verallgemeinerung der RIEMANN'schen Integrationsmethode auf Differentialgleichungen n-ter Ordnung in zwei Veränderlichen." Math. Ann. Bd. 103 (1930).

(1) die Ableitungen nach vier im allgemeinen verschiedenen Richtungen $a^k, b^k, \bar{a}^k, \bar{b}^k$ enthalten. Durch Linearkombinationen der beiden Gleichungen (1), indem wir die erste mit einer Funktion λ_1 und die zweite mit λ_2 multiplizieren und addieren, ergibt sich ein Ausdruck der Form

$$(\lambda_1 a^k + \lambda_2 \bar{a}^k)\, u_k + (\lambda_1 b^k + \lambda_2 \bar{b}^k)\, v_k + \ldots\ldots = 0. \tag{I 2}$$

Bei variablen λ_1, λ_2 bestimmen die Klammern zwei projektiv aufeinander bezogene Strahlenbüschel, deren Fixstrahlen durch die Gleichung

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 a^1 + \lambda_2 \bar{a}^1, & \lambda_1 a^2 + \lambda_2 \bar{a}^2 \\ \lambda_1 b^1 + \lambda_2 \bar{b}^1, & \lambda_1 b^2 + \lambda_2 \bar{b}^2 \end{vmatrix} = 0 \text{ aber } \not\equiv 0 \tag{I 3}$$

gegeben sind. Diese Strahlen bestimmen die charakteristischen Richtungen unseres Systems (1).

Definition. Das System (1) heißt in dem Gebiet der x^1, x^2 Ebene hyperbolisch, in dem (I 3) genau zwei reelle, verschiedene Wurzeln $\lambda_1 : \lambda_2$ besitzt. Fallen die Wurzeln zusammen, so nennt man (1) parabolisch, sind sie konjugiert komplex, elliptisch.

Im folgenden beschränken wir uns auf solche Gebiete der x^1, x^2 Ebene, in denen (1) hyperbolisch ist und bezeichnen mit $\nu_1 : \nu_2$, $\mu_1 : \mu_2$ die zwei Wurzeln von (I 3). Dann lassen sich die charakteristischen Richtungen bei geeigneter Wahl der Bezeichnung in (1) schreiben:

$$\text{I)}\ \alpha^i = \nu_1 a^i + \nu_2 \bar{a}^i; \quad \text{II)}\ \bar{\alpha}^i = \mu_1 a^i + \mu_2 \bar{a}^i. \tag{I 4}$$

Wir werden künftig kurz von Richtung I oder II bzw. α^i oder $\bar{\alpha}^i$ sprechen und meist so normieren, daß $\alpha^1 \alpha^1 + \alpha^2 \alpha^2 = 1$ und $\bar{\alpha}^1 \bar{\alpha}^1 + \bar{\alpha}^2 \bar{\alpha}^2 = 1$ ist. Wegen (I 3) gibt es Funktionen $\varrho_1, \varrho_2, \sigma_1, \sigma_2$, so daß gilt:

$$\begin{aligned} \varrho_1 (\nu_1 b^k + \nu_2 \bar{b}^k) &= \varrho_2 (\nu_1 a^k + \nu_2 \bar{a}^k) \\ \sigma_1 (\mu_1 b^k + \mu_2 \bar{b}^k) &= \sigma_2 (\mu_1 a^k + \mu_2 \bar{a}^k). \end{aligned} \qquad k = 1, 2 \tag{I 5}$$

Gleichung (I 2) läßt sich nach (I 4) und (I 5) wegen (I 1) in den Formen schreiben:

$$\begin{aligned} \varrho_1 u_\alpha + \varrho_2 v_\alpha + \ldots\ldots &= 0 \\ \sigma_1 u_{\bar{\alpha}} + \sigma_2 v_{\bar{\alpha}} + \ldots\ldots &= 0. \end{aligned} \tag{I 6}$$

Hier können ϱ_1, σ_1 nicht gleichzeitig verschwinden wegen (I 3) ($\not\equiv 0$). Sind $\varrho_1 \not\equiv 0$, $\sigma_1 \not\equiv 0$, dann können wir $\varrho_1 = \sigma_1 = 1$; $\varrho_2 = \varrho$, $\sigma_2 = \sigma$ setzen und (I 6) unter Beachtung von

$$\varrho\, v_\alpha = (\varrho\, v)_\alpha - v\, \varrho_\alpha$$

in der Form schreiben:

$$\begin{aligned} &(u + \varrho\, v)_\alpha + (\nu_1 c + \nu_2 \bar{c})\, u + (\nu_1 d + \nu_2 \bar{d} - \varrho_\alpha)\, v + \nu_1 e + \nu_2 \bar{e} = 0 \\ &(u + \sigma\, v)_{\bar{\alpha}} + (\mu_1 c + \mu_2 \bar{c})\, u + (\mu_1 d + \mu_2 \bar{d} - \sigma_{\bar{\alpha}})\, v + \mu_1 e + \mu_2 \bar{e} = 0. \end{aligned} \tag{I 7}$$

Führen wir an Stelle der Funktionen u, v die Funktionen U, V ein:

$$\text{(I 8)} \qquad \begin{aligned} U &= u + \varrho v \\ V &= u + \sigma v \end{aligned} \qquad \text{oder} \qquad \begin{aligned} u &= \frac{U\sigma - V\varrho}{\sigma - \varrho} \\ v &= \frac{V - U}{\sigma - \varrho} \end{aligned},$$

dann läßt sich (I 7) schreiben:

$$\text{(I 9)} \qquad \begin{aligned} U_\alpha &= AU + BV + C \\ V_{\bar\alpha} &= \bar A U + \bar B V + \bar C \end{aligned}.$$

Diese Gleichungen nennen wir die Normalform des Systems (1). *Die Koeffizienten* $A, \bar A, B \ldots\ldots \bar C$ *sind elementar berechenbare Funktionen von* x^1, x^2. *Sie sind stetig, wenn die Koeffizienten in* (1) *und die Richtungsableitungen*

$$\text{(I 10)} \qquad \varrho_\alpha = \left(\frac{\nu_1 b^1 + \nu_2 \bar b^1}{\nu_1 a^1 + \nu_2 \bar a^1}\right)_\alpha, \quad \sigma_{\bar\alpha} = \left(\frac{\mu_1 b^1 + \mu_2 \bar b^1}{\mu_1 a^1 + \mu_2 \bar a^1}\right)_{\bar\alpha}$$

stetig sind.

Falls ϱ_1 oder σ_1 in (I 6) verschwinden, so gelangt man zu derselben Normalform, wenn $u = U$ bzw. $v = V$ gesetzt werden[6]).

Die charakteristischen Richtungen werden nach (I 4) *und* (I 3) *durch die Vektoren* α^i *und* $\bar\alpha^i$ *gegeben. Die beiden Scharen der charakteristischen Kurven genügen den Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen*:

$$\text{(I 11)} \qquad \text{I)} \quad \begin{aligned} \dot x^1 &= \alpha^1 \\ \dot x^2 &= \alpha^2 \end{aligned}; \qquad \text{II)} \quad \begin{aligned} \dot x^1 &= \bar\alpha \\ \dot x^2 &= \bar\alpha^2 \end{aligned}.$$

Die Charakteristiken bilden ein Kurvennetz, wenn die rechten Seiten in (I 11), α^i, $\bar\alpha^i$, *und erst recht, wenn wegen* (I 3) *und* (I 4) *die Koeffizienten* a^k, $\bar a^k$, b^k, $\bar b^k$ *stetig differenzierbar sind.* Zu den Vektoren α^i, $\bar\alpha^i$ gibt es ein Paar kontragredienter Vektoren α_i, $\bar\alpha_i$, die durch das Gleichungssystem

$$\text{(I 12)} \qquad \begin{aligned} \alpha^i \alpha_i &= 1 & \alpha^i \bar\alpha_i &= 0 \\ \bar\alpha^i \alpha_i &= 0 & \bar\alpha^i \bar\alpha_i &= 1 \end{aligned}$$

bestimmt sind. Sie bilden die Linearformen:

---

[6]) Die durch (I 3) ausgeschlossenen Systeme (1) der Form:

$$a\, u_{x^1} + b\, v_{x^1} + \ldots = 0$$
$$a\, u_{x^2} + b\, v_{x^2} + \ldots = 0$$

untersuchte F. Rellich. Siehe F. Rellich: „Über die Reduktion gewisser ausgearteter Systeme von part. Differentialgleichungen" Math. Ann. Bd. 109 (1934).

(I 13) $$\omega_1 = a_i dx^i; \qquad \omega_2 = \bar{a}_i dx^i.$$

Wegen (I 11) *ist längs einer Charakteristik mit der Fortschreitungsrichtung I die Form* $\omega_2 = 0$ *und* $t_1 = \int \omega_1$ *der Parameter, nach dem* (I 11) I) *differenziert ist; entsprechendes gilt für die andere Charakteristik* ($\omega_1 = 0$; $t_2 = \int \omega_2$).

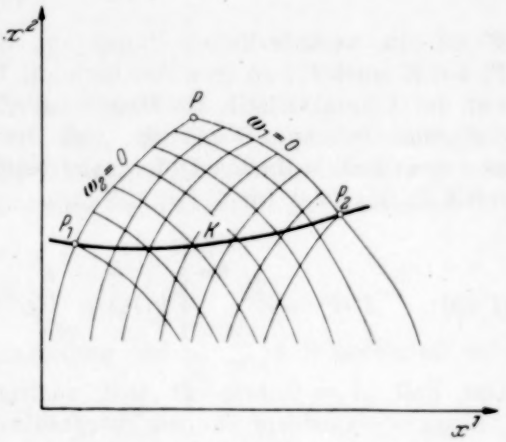

Fig. 1.

In der Normalform (I 9) bedeutet U_x die gewöhnliche Ableitung von U nach dem Parameter $t_1 = \int \omega_1$ längs einer Charakteristik $\omega_2 = 0$. Sind PP_1 und PP_2 (siehe Bild 1) die durch den Punkt P des Bereiches gehenden Charakteristiken, dann läßt sich die Normalform (I 9) in Integralform schreiben:

(I 14)
$$U(P) = U(P_1) + \int_{P_1}^{P} (A\,U + B\,V + C)\,\omega_1$$
$$V(P) = V(P_2) + \int_{P_2}^{P} (\bar{A}\,U + \bar{B}\,V + \bar{C})\,\omega_2 .$$

Ist in (I 9) $B = 0$ oder $\bar{A} = 0$, so ist das System (I 9) geschlossen integrierbar. U, V und damit u, v sind durch Quadraturen zu bestimmen [7]). Für die integrablen Fälle von (I 9) behandeln wir sogleich ein CAUCHY'sches Anfangswertproblem.

Es seien die Voraussetzungen zu (I 9) und (I 11) erfüllt. Ferner sei K eine Anfangskurve, die durch stetig differenzierbare Funktionen $x^1 = x^1(\lambda)$; $x^2 = x^2(\lambda)$ mit $(\dot{x}^1)^2 + (\dot{x}^2)^2 \neq 0$ und nirgends charakteristischer Richtung gegeben ist. Auf dieser Kurve werden u, v als stetig differenzierbare Funktionen von λ vorgegeben, damit sind nach (I 8) U, V auf K bekannt. Es sei $U(K(\lambda)) = \Phi(\lambda)$, $V(K(\lambda)) = \Psi(\lambda)$. Wir beschränken uns auf den Fall $B = 0$. Dann wird die erste Gleichung von (I 9) $U_\alpha = A\,U + C$. Das ist eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung für die Richtung α, d. h. für die durch den Anfangspunkt gehende Charakteristik I. (Siehe Bild 1). Daher ist $U(x^1, x^2)$ an der Stelle P (kurz $U(P)$):

---

[7]) Ob u, v tatsächlich in (1) eingesetzt werden können, ist damit nicht gezeigt, denn aus (I 9) folgt nur die Stetigkeit von $U_\alpha = (u + \varrho\, v)_\alpha$, $V_{\bar{\alpha}} = (u + \sigma\, v)_{\bar{\alpha}}$, daraus aber nicht die Existenz von $u_{x^1}, u_{x^2}, v_{x^1}, v_{x^2}$.

$$U(P) = e^{\int_{P_1}^{P} A\,\omega_1} \left\{ \Phi(P_1) + \int_{P_1}^{P} C e^{-\int_{P_1}^{P'} A\,\omega_1} \omega_1 \right\}. \tag{I 15}$$

P' ist ein veränderlicher Punkt auf der Charakteristik PP_1. Läuft P_1 auf K nach P_2, so gewinnt man aus (I 15) die Werte der Funktion U auf der Charakteristik II. Damit ist aber U längs der Charakteristik PP_2 eine bekannte Funktion, und die zweite Gleichung in (I 9) ist eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung für V längs der Charakteristik II. Es folgt für V

$$V(P) = e^{\int_{P_2}^{P} \bar{B}\,\omega_2} \left\{ \Psi(P_2) + \int_{P_2}^{P} (\bar{C} + \bar{A} U)\, e^{-\int_{P_2}^{P''} \bar{B}\,\omega_2} \omega_2 \right\}. \tag{I 16}$$

Der Fall $\bar{A} = 0$ erledigt sich analog. Damit ist das CAUCHY'sche Anfangswertproblem für die integrablen Fälle von (1) durch Quadraturen gelöst unter der Voraussetzung, daß die aus U, V bestimmten u, v die Eigenschaft haben, daß die Ableitungen u_{x^1}, u_{x^2}, v_{x^1}, v_{x^2} existieren (vgl. [7]).

Es ist eine bekannte Tatsache, daß die hyperbolische Differentialgleichung

$$z_{x^1 x^2} + a z_{x^1} + b z_{x^2} + c z + d = 0 \tag{I 17}$$

mit a, b, c, d Funktionen von x^1, x^2 durch Quadraturen lösbar ist, falls eine der LAPLACE'schen Invarianten $a_{x^1} + ab - c$ oder $b_{x^2} + ab - c$ verschwindet [3]). Wir setzen $u = z$, $v = z_{x_1}$ und erhalten mit

$$\text{I)}\ \alpha^1 = 1, \alpha^2 = 0; \quad \text{II)}\ \bar{\alpha}^1 = 0, \bar{\alpha}^2 = 1 \tag{I 18}$$

und mit $u = U$, $bu + v = V$ die Normalform

$$\begin{aligned} U_{\bar{u}} &= -bU + V, \\ V_{\bar{u}} &= (b_{x^2} + ab - c)\, U - aV - d. \end{aligned} \tag{I 19}$$

Sie ist integrabel, wenn die Invariante $b_{x^2} + ab - c$ verschwindet.

Abschnitt II.

Existenzsätze für das System (1) und (I 9).

In diesem Abschnitt sollen die Bedingungen für die Existenz eindeutiger Lösungen des CAUCHY'schen Problems für das System (1) bzw. das System (I 9) untersucht werden.

1) Normalform.

Wir beginnen mit der Normalform (I 9) und schreiben sie unter Beibehaltung der Buchstaben in der Form:

$$\text{(II 1)} \qquad \begin{aligned} U_\alpha + AU + C &= BV \\ V_{\bar\alpha} + \bar B V + \bar C &= \bar A U . \end{aligned}$$

Zunächst beweisen wir den folgenden *Satz*:

Es seien $A, \bar A, B, \bar B, C, \bar C$ *in einem Gebiet der* x^1, x^2*-Ebene stetig, das die Anfangskurve* K *enthält und in dem das Kurvennetz gegeben ist, welches durch die „charakteristischen Differentialgleichungen“* (I 11)

$$\text{I)} \quad \begin{aligned} \dot x^1 &= \alpha^1 \\ \dot x^2 &= \alpha^2 \end{aligned} \qquad \text{II)} \quad \begin{aligned} \dot x^1 &= \bar\alpha^1 \\ \dot x^2 &= \bar\alpha^2 \end{aligned}$$

mit $\alpha^1, \alpha^2, \bar\alpha^1, \bar\alpha^2$ *stetig differenzierbar und* $\begin{vmatrix} \alpha^1 & \alpha^2 \\ \bar\alpha^1 & \bar\alpha^2 \end{vmatrix} \neq 0$ *bestimmt wird. Die Anfangskurve* K *sei in der Form* $x^1 = x^1(\lambda)$, $x^2 = x^2(\lambda)$ *mit stetig differenzierbaren Funktionen* x^1, x^2 *und* $(\dot x^1)^2 + (\dot x^2)^2 \neq 0$ *gegeben, so daß nirgends ihre Tangente mit einer charakteristischen Richtung* α *oder* $\bar\alpha$ *zusammenfällt. Werden* U, V *auf* K *als stetige Funktionen vorgegeben,*

$$\text{(II 2)} \qquad U(K(\lambda)) = \Phi(\lambda), \quad V(K(\lambda)) = \Psi(\lambda),$$

so gibt es in einer gewissen Umgebung der Anfangskurve K *genau eine Lösung* U, V *von* (II 1) *bzw.* (I 9) *mit* $U, V, U_\alpha, V_{\bar\alpha}$ *stetig und* $U(K(\lambda)) = \Phi(\lambda)$, $V(K(\lambda)) = \Psi(\lambda)$.

Beweis. Wir definieren sukzessive Funktionen $U^0, V^0, U^1, V^1, \ldots\ldots$, die den Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen genügen:

$$\text{(II 3)} \qquad \begin{aligned} U^0_\alpha + A\,U^0 + C &= 0 \\ V^0_{\bar\alpha} + \bar B\,V^0 + \bar C &= 0 \end{aligned} \qquad \text{mit } U^0 = \Phi,\ V^0 = \Psi \text{ auf } K$$

$$\text{(II 4)} \qquad \begin{aligned} U^n_\alpha + A\,U^n + C &= B\,V^{n-1} \\ V^n_{\bar\alpha} + \bar B\,V^n + \bar C &= \bar A\,U^{n-1} \end{aligned} \qquad \text{mit } U^n = \Phi,\ V^n = \Psi \text{ auf } K$$

Jedes der Systeme (II 3), (II 4) wird in der gleichen Weise gelöst wie (I 15), (I 16) (vgl. Bild 1). Die Funktionen $U^0, V^0, U^1, V^1 \ldots$ besitzen daher die Integraldarstellungen

$$\text{(II 5)} \qquad \begin{aligned} U^0(P) &= e^{-\int\limits_{P_1}^{P} A\,\omega_1} \left\{ \Phi(P_1) - \int\limits_{P_1}^{P} C\,e^{\int\limits_{P_1}^{P'} A\,\omega_1}\,\omega_1 \right\} \\ V^0(P) &= e^{-\int\limits_{P_2}^{P} \bar B\,\omega_2} \left\{ \Psi(P_2) - \int\limits_{P_2}^{P} \bar C\,e^{\int\limits_{P_2}^{P'''} \bar B\,\omega_2}\,\omega_2 \right\} \end{aligned}$$

$$
\text{(II 6)}\qquad
\begin{aligned}
U^n(P) &= e^{-\int_{P_1}^{P} A\,\omega_1}\left\{\Phi(P_1) - \int_{P_1}^{P}(C - B V^{n-1})\, e^{\int_{P_1}^{P'} A\,\omega_1}\,\omega_1\right\}\\
V^n(P) &= e^{-\int_{P_2}^{P} \bar{B}\,\omega_2}\left\{\Psi(P_2) - \int_{P_2}^{P}(\bar{C} - \bar{A} U^{n-1})\, e^{\int_{P_2}^{P''} \bar{B}\,\omega_2}\,\omega_2\right\}
\end{aligned}
$$

(Wegen P', P'' vgl. (I 15).)

Es soll gezeigt werden, daß in einer passend zu wählenden Umgebung G eines jeden Punktes der Anfangskurve K die Funktionenfolge (II 6) gegen die Lösungen U, V von (II 1) konvergiert.

Es sei l die größte der in G auftretenden Längen der Charakteristiken, sowie M eine gemeinsame Schranke für alle bekannten Funktionen in G. Daraus folgen nach (II 5) für U^0, V^0 die Abschätzungen:

$$
\text{(II 7)}\qquad
\begin{aligned}
|U^0(P)| &\leqq e^{Ml}\{M + l M e^{Ml}\} = S,\\
|V^0(P)| &\leqq e^{Ml}\{M + l M e^{Ml}\} = S,
\end{aligned}
$$

wobei S als Abkürzung für die rechte Seite gesetzt ist.

Es gibt eine Zahl N derart, daß das Iterationsverfahren (II 5), (II 6) aus dem Bereich B des vierdimensionalen x^1, x^2, U, V-Raumes mit x^1, x^2 aus G und $|U| < N$, $|V| < N$ nicht hinausführt, wenn die Umgebung G der Kurve K hinreichend eingeengt wird. Angenommen, es sei eine Abschätzung

$$|U^{n-1}(P)| < \bar{U}^{n-1}, \quad |V^{n-1}(P)| < \bar{V}^{n-1}$$

gefunden, dann gelten nach (II 6) die Abschätzungen

$$
\begin{aligned}
|U^n(P)| &\leqq e^{Ml}\{M + (M + M\,\bar{V}^{n-1})\, l\, e^{Ml}\}\\
|V^n(P)| &\leqq e^{Ml}\{M + (M + M\,\bar{U}^{n-1})\, l\, e^{Ml}\}
\end{aligned}
$$

oder nach (II 7)

$$
\begin{aligned}
|U^n(P)| &\leqq S + l M e^{2Ml}\,\bar{V}^{n-1}\\
|V^n(P)| &\leqq S + l M e^{2Ml}\,\bar{U}^{n-1}.
\end{aligned}
$$

Dann wird aber mit der Abkürzung $\varkappa = l M e^{2lM}$

$$
\begin{aligned}
|U^1(P)| &\leqq S(1 + l M e^{2Ml}) = S(1 + \varkappa)\\
|U^2(P)| &\leqq S[1 + \varkappa(1 + \varkappa)]\\
\text{(II 8a)}\qquad |U^n(P)| &\leqq S\{1 + \varkappa + \varkappa^2 + \cdots + \varkappa^n\}
\end{aligned}
$$

und ebenso

$$\text{(II 8b)}\qquad |V^n(P)| \leqq S\{1 + \varkappa + \varkappa^2 + \cdots + \varkappa^n\}.$$

Wählt man G, d. h. also die Länge l so, daß

$$\text{(II 9)}\qquad \varkappa = l M e^{2Ml} < 1,$$

so ist die rechts stehende Summe für $\lim n \to \infty$ konvergent, und es gibt eine Zahl N, so daß

$$|U^n(P)| < N; \quad |V^n(P)| < N.$$

Zum Beweis der Konvergenz des Iterationsverfahrens bilden wir nach (II 5) und (II 6) die Differenzen konsekutiver Funktionen und erhalten die Abschätzungen

$$\begin{aligned} |U^1(P) - U^0(P)| &\leqq N M l e^{2Ml} \\ |V^1(P) - V^0(P)| &\leqq N M l e^{2Ml}. \end{aligned} \tag{II 10}$$

Für $U^{n-1} - U^{n-2}$ und $V^{n-1} - V^{n-2}$ seien die Induktionsannahmen

$$\begin{aligned} |U^{n-1}(P) - U^{n-2}(P)| &\leqq N (Ml)^{n-1} (e^{2Ml})^{n-1} \\ |V^{n-1}(P) - V^{n-2}(P)| &\leqq N (Ml)^{n-1} (e^{2Ml})^{n-1} \end{aligned} \tag{II 11}$$

richtig, dann folgt aus (II 6)

$$\begin{aligned} |U^n(P) - U^{n-1}(P)| &\leqq N (Ml)^n (e^{Ml})^{2n} \\ |V^n(P) - V^{n-1}(P)| &\leqq N (Ml)^n (e^{Ml})^{2n}. \end{aligned} \tag{II 12}$$

Aus der Forderung (II 9) ergibt sich sofort die gleichmäßige Konvergenz der unendlichen Summen

$$U^0 + \sum_{n=1}^{\infty} (U^n - U^{n-1}); \quad V^0 + \sum_{n=1}^{\infty} (V^n - V^{n-1}) \tag{II 13}$$

gegen stetige Ortsfunktionen U, V. Dann kann in (II 6) der Grenzübergang $n \to \infty$ auch unter den Integralen vorgenommen werden. Durch Differentiation in Richtung α bzw. $\bar{\alpha}$ folgt, daß U, V Lösungen des Anfangswertproblemes von (II 1) sind und daß U_α, $V_{\bar{\alpha}}$ stetig sind.

Angenommen, es gäbe zwei Lösungen von (II 1) U_1, V_1; U_2, V_2 mit $U_1 = U_2 = \Phi$, $V_1 = V_2 = \Psi$ auf K, dann folgt aus (II 6) nach Durchführung des Grenzüberganges $n \to \infty$

$$\begin{aligned} U_1 - U_2 &= e^{-\int_{P_1}^{P} A\omega_1} \int_{P_1}^{P} B(V_1 - V_2)\, e^{\int_{P_1}^{P'} A\omega_1} \omega_1 \\ V_1 - V_2 &= e^{-\int_{P_2}^{P} \bar{B}\omega_2} \int_{P_2}^{P} \bar{A}(U_1 - U_2)\, e^{\int_{P_2}^{P''} \bar{B}\omega_2} \omega_2. \end{aligned} \tag{II 14}$$

Die Maximalwerte von $|U_1 - U_2|$ und $|V_1 - V_2|$ in G seien μ_1 und μ_2. Dann folgt aus (II 14) und (II 9)

$$|U_1 - U_2| \leqq \mu_2 \varkappa, \quad |V_1 - V_2| \leqq \mu_1 \varkappa. \tag{II 15}$$

Diese Ungleichungen gelten insbesondere an den Stellen, wo $|U_1 - U_2|$ bzw. $|V_1 - V_2|$ ihre Maximalwerte annehmen. Hier wird

(II 16) $$\mu_1 \leqq \mu_2 \varkappa; \quad \mu_2 \leqq \mu_1 \varkappa.$$

Wegen $\varkappa < 1$ folgt daraus sofort $\mu_1 = \mu_2 = 0$.

2) Das allgemeine System (1).

Nach dem soeben bewiesenen Satz folgt unmittelbar die Existenz stetiger Lösungen für das CAUCHY'sche Anfangswertproblem des allgemeinen Differentialgleichungssystems (1) unter Beachtung der Gleichungen (I 8). Allerdings können wir u, v nur insofern als Lösungen bezeichnen, daß sie in den Linearkombinationen U, V die zugehörige Normalform (I 9) befriedigen. Sollen u, v Lösungen des Systems (1) im üblichen Sinne sein, so müssen die partiellen Ableitungen u_{x^1}, u_{x^2}, v_{x^1}, v_{x^2} existieren, was unter den schwachen Voraussetzungen des obigen Existenzsatzes nicht der Fall zu sein braucht. Der Existenzsatz garantiert nur die Stetigkeit von U_α und $V_{\bar\alpha}$, d. h. daß $(u + \varrho v)_\alpha$ und $(u + \sigma v)_{\bar\alpha}$ stetig sind, nicht aber die Existenz der Ableitungen $U_{\bar\alpha} = (u + \varrho v)_{\bar\alpha}$ und $V_\alpha = (u + \sigma v)_\alpha$. Es ist also zu untersuchen, unter welchen zusätzlichen Bedingungen $U_{\bar\alpha}$ und V_α existieren. Daraus folgt leicht die Existenz von $U_{x^1}, U_{x^2}, V_{x^1}, V_{x^2}$ und daraus $u_{x^1}, u_{x^2}, v_{x^1}, v_{x^2}$. Bei dieser Untersuchung kommt man besonders einfach zum Ziel, wenn man die PFAFF'schen Formen ω_1, ω_2 (I 13) durch einen integrierenden Faktor zu vollständigen Differentialen ergänzt. Diese Integrabilität wird nur für das Ende dieses Abschnitts vorausgesetzt.

Sind die Koeffizienten von (1) a^k, $\bar a^k$, b^k, $\bar b^k$ *zweimal stetig differenzierbar und* $c, \bar c, d, \bar d, e, \bar e$ *einmal stetig differenzierbar bezüglich* x^1, x^2 *und* ϱ *und* σ (I 10) *stetig; erfüllt ferner die* CAUCHY*'sche Anfangskurve* K *die Forderungen des vorigen Satzes und sind* u, v *auf* K *durch stetig differenzierbare Funktionen*

(II 17) $$u(K(\lambda)) = \varphi(\lambda), \quad v(K(\lambda)) = \psi(\lambda)$$

gegeben, dann gibt es genau eine Lösung des Systems (1), *für die* $u, v, u_{x^1}, u_{x^2}, v_{x^1}, v_{x^2}$ *stetig sind und* $u = \varphi$, $v = \psi$ *auf* K [8]).

Beweis. Unter den gemachten Voraussetzungen können wir vom System (1) auf die Normalform (I 9) übergehen und die Stetigkeit von U_α, $V_{\bar\alpha}$ nach dem vorigen Satz annehmen. Die Werte von U, V auf K folgen aus (II 17) und (I 8). Angenommen, es seien p, q integrierende Faktoren der Linearformen ω_1, ω_2 (I 13), dann sind die Linearformen

(II 18) $$\Omega_1 = p\alpha_i dx^i; \quad \Omega_2 = q\bar\alpha_i dx^i$$

vollständige Differentiale, deren äußere Ableitungen (vgl. Teil II Abschnitt IV) $[d\Omega_1]$, $[d\Omega_2]$ verschwinden.

---

[8]) Die Stetigkeit der Ableitungen läßt sich auch ohne Verwendung integrierender Faktoren beweisen. Dabei kommt man mit geringeren Voraussetzungen für die Koeffizienten des Systems (1) aus. Kurz gesagt ist nötig, daß die ersten Ableitungen von $a^k, \bar a^k, b^k, \bar b^k$ und die $c, \bar c, d, \bar d, e, \bar e$ in G längs eines nichtcharakteristischen Richtungsfeldes stetig differenzierbar sind.

$$
\begin{aligned}
[d\,\Omega_1] &= \{(p\,\alpha_1)_{x^2} - (p\,\alpha_2)_{x^1}\}\,[d\,x^2\,d\,x^1] = 0 \\
[d\,\Omega_2] &= \{(q\,\bar{\alpha}_2)_{x^1} - (q\,\bar{\alpha}_2)_{x^1}\}\,[d\,x^2\,d\,x^1] = 0.
\end{aligned}
\tag{II 19}
$$

Dies gibt je eine lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung für p, q, deren Koeffizienten nach unseren Voraussetzungen in der Umgebung von K stetig differenzierbare Funktionen sind. Damit ist die Existenz von p, q, beide nicht gleich Null in der Umgebung von K, gesichert [9]). Jetzt stellen die invarianten Ableitungen bezüglich Ω_1, Ω_2 gewöhnliche partielle Ableitungen bezüglich des krummlinigen Koordinatensystemes, das durch die Charakteristiken gebildet wird, dar. Die dazugehörigen krummlinigen Koordinaten seien s und τ (vgl. Bild 2). Die Anfangskurve K läßt sich in diesem Koordinatensystem in der Form $s = f(\tau)$ oder $\tau = g(s)$ darstellen, da sie nirgends mit dem Kurvennetz zusammenfallende Richtung hat. Die Lösungen von (II 1) lassen sich dann in der Form darstellen

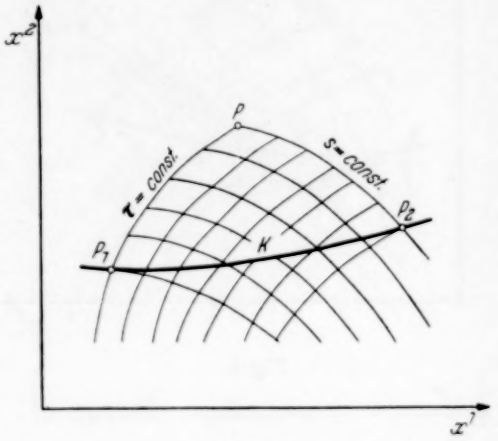

Fig. 2.

$$
U(s,\tau) = e^{-\int_{f(\tau)}^{s} \frac{A(t,\tau)}{p(t,\tau)}\,dt}\left\{\Phi(\tau) - \int_{f(\tau)}^{s} \frac{C(t,\tau) - B(t,\tau)\,V(t,\tau)}{p(t,\tau)} \cdot e^{\int_{f(\tau)}^{t} \frac{A(u,\tau)}{p(u,\tau)}\,du}\,dt\right\}
$$

(II 20)

$$
V(s,\tau) = e^{-\int_{g(s)}^{\tau} \frac{\bar{B}(s,t)}{q(s,t)}\,dt}\left\{\Psi(s) - \int_{g(s)}^{\tau} \frac{\bar{C}(s,t) - \bar{A}(s,t)\,U(s,t)}{q(s,t)} \cdot e^{\int_{g(s)}^{t} \frac{\bar{B}(s,u)}{q(s,u)}\,du}\,dt\right\}.
$$

Damit ist U_τ und V_s sofort bildbar. Wegen der Stetigkeit von U_s, V_τ folgt damit die Stetigkeit von U_τ, V_s und daraus die Stetigkeit von U_{x^1}, U_{x^2}, V_{x^1}, V_{x^2}. Daraus ergibt sich die Stetigkeit von u_{x^1}, u_{x^2}, v_{x^1}, v_{x^2} (I 8) und die Lösbarkeit des Problems (1).

3) Ausbreitung von Unstetigkeiten.

Wir führen wieder das charakteristische Kurvennetz s, τ ein. Es sei wie bisher vorgegeben: Die Funktionen $U(K(\lambda)) = \Phi(\lambda)$, $V(K(\lambda))$

[9]) E. Kamke: Differentialgleichungen reeller Funktionen, Leipzig 1930, S. 335. Courant-Hilbert: Methoden der math. Physik, Band II, Seite 54 (Fußnote).

$= \Psi(\lambda)$ stetig auf K, dagegen seien die Ableitungen $\Phi'(\lambda)$, $\Psi'(\lambda)$ im Punkt B von K (vgl. Bild 3) nicht stetig. Sie sollen bei B einen rechten und einen linken Grenzwert besitzen, B wird also als Sprungstelle der Ableitung angenommen. Nach dem ersten Existenzsatz (II; 1) folgt allein aus der Stetigkeit der Anfangswerte die Stetigkeit der Ableitungen U_a, $V_{\bar{a}}$ im ganzen Existenzbereich. Daher muß mindestens $U_{\bar{a}}(B)$ oder $V_a(B)$ unstetig sein, denn sonst wären $U_\lambda(B)$ und $V_\lambda(B)$ stetig entgegen der Voraussetzung. Nach (II 20) gilt im Innern des Bereiches für die Ableitungen nach den krummlinigen Parametern

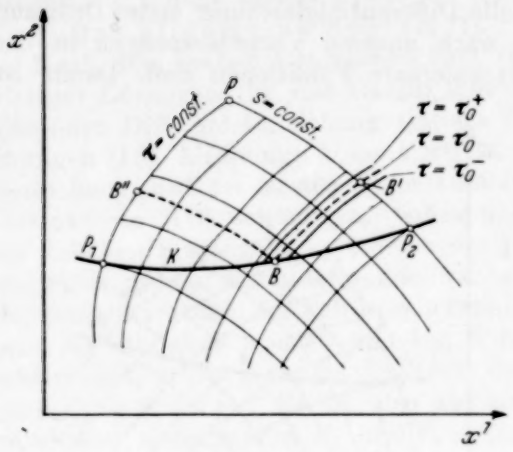

Fig. 3.

$$\text{(II 21)} \qquad U_\tau(s,\tau) = e^{-\int_{t(\tau)}^{s} \frac{A(t,\tau)}{p(t,\tau)}\,dt} \frac{d\Phi(\tau)}{d\tau} + \cdots .$$

Die durch Punkte angedeuteten Glieder sind für die folgenden Überlegungen unwesentlich. U_τ ist längs jeder Kurve $\tau = \text{const}$ stetig (siehe Bild 3), mit Ausnahme der durch B gehenden Kurve $\tau = \tau_0$. Nähern wir uns von beiden Seiten der Kurve $\tau = \tau_0$, so wird die Differenz

$$\text{(II 22)} \quad U_\tau(s,\tau_0^+) - U_\tau(s,\tau_0^-) = e^{-\int_{t(\tau_0)}^{s} \frac{A(t,\tau_0)}{p(t,\tau_0)}\,dt} \left\{ \frac{d\Phi(\tau)}{d\tau}\bigg|_{\tau=\tau_0^+} - \frac{d\Phi(\tau)}{d\tau}\bigg|_{\tau=\tau_0^-} \right\}.$$

Entsprechendes gilt für die durch B gehende Charakteristik der anderen Schar $s = s_0$

$$V_s(s_0^+,\tau) - V_s(s_0^-,\tau) = e^{-\int_{g(s_0)}^{\tau} \frac{\bar{B}(s_0,t)}{g(s_0,t)}\,dt} \left\{ \frac{d\Psi(s)}{ds}\bigg|_{s=s_0^+} - \frac{d\Psi(s)}{ds}\bigg|_{s=s_0^-} \right\}.$$

Der Sprung pflanzt sich also bei U_τ längs BB', bei V_s längs BB'' fort. Die vor den Klammern stehenden e-Funktionen geben die Intensität der Fortpflanzung der Sprünge an.

Abschnitt III.

Gemischte Anfangs- und Randwertprobleme für das System (I 9) und (1).

Bei der Anwendung auf aerodynamische und andere physikalische Probleme treten außer dem CAUCHY'schen Anfangswertaufgaben häufig noch andere auf, die man das „charakteristische" und das „gemischte Anfangswertproblem" nennt. Wir wollen in diesem Abschnitt die Probleme und die Bedingungen der Lösbarkeit formulieren.

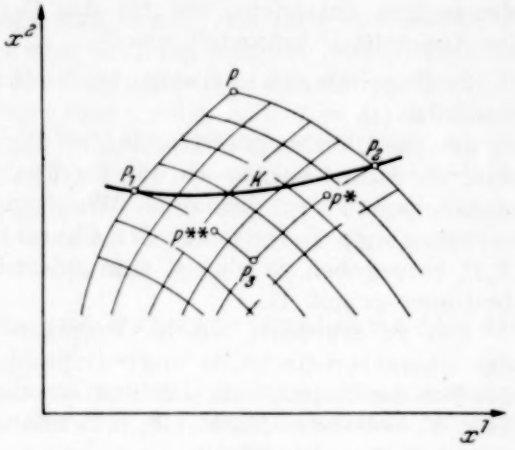

Fig. 4.

1) Das charakteristische Anfangswertproblem für die Normalform (I 9).

Bild 4 zeigt ein Stück des charakteristischen Netzes. $P_1 P_3$ ist eine charakteristische Kurve der zweiten Schar $\omega_1 = 0$, $P_2 P_3$ eine der ersten $\omega_2 = 0$.

Bei dem charakteristischen Anfangswertproblem für die Normalform (I 9) *wird*

(III 1) $$U = \Phi(t_2)$$

als stetige Funktion von t_2 *auf* $P_1 P_3$ *und*

(III 2) $$V = \Psi(t_1)$$

als stetige Funktion von t_1 *auf* $P_2 P_3$ *vorgegeben.* (Wegen t_1, t_2 siehe zu (I 13)). Dann läßt sich zunächst die Funktion U auf der Charakteristik $P_2 P_3$ bestimmen. Es sei P^* irgend ein Punkt auf $P_2 P_3$, dann ist wegen (III 2) der Ausdruck $BV + C$ in (I 9) bekannt und man hat längs der Charakteristik $P_2 P_3$ in (I 9) eine lineare Differentialgleichung für U mit der Lösung

(III 3) $$U(P^*) = e^{\int_{P_3}^{P^*} A\,\omega_1} \left\{ \Phi(P_3) + \int_{P_3}^{P^*} (BV + C)\, e^{-\int_{P_3}^{P^{*\prime}} A\,\omega_1}\, \omega_1 \right\}$$

($P^{*\prime}$ ist ein variabler Punkt auf der Charakteristik $P_2 P_3$, der zwischen P^* und P_3 liegt). Die Integrationskonstante ist dabei so gewählt, daß $U(P_3)$ mit dem gegebenen Wert von U auf $P_1 P_3$ übereinstimmt. In derselben Weise ergibt sich für V für jeden Punkt P^{**}, der auf der Charakteristik $P_1 P_3$ liegt:

$$\text{(III 4)} \qquad V(P^{**}) = e^{\int_{P_3}^{P^{**}} \overline{B}\,\omega_2} \left\{ \Psi(P_3) + \int_{P_3}^{P^{**}} (\overline{A}\,U + \overline{C})\, e^{-\int_{P_3}^{P^{**'}} \overline{B}\,\omega_2} \omega_2 \right\}.$$

Jetzt kann man für irgendeinen Punkt P (s. Bild 4) die Funktionen U, V durch ein Iterationsverfahren bestimmen, welches in allen Teilen demjenigen entspricht, das für das CAUCHY'sche Anfangswertproblem im Abschnitt II behandelt wurde.

2) Das charakteristische Anfangswertproblem für das System (1).

Ist das Gleichungssystem in der allgemeinen Form (1) gegeben, so wird es darauf ankommen, für die Funktionen u, v „charakteristische Anfangswerte" zu definieren. Wir beginnen mit dem trivialen Fall:

Ist $u + \varrho v$ (s. (I 8)) auf der Charakteristik $P_1 P_3$ und $u + \sigma v$ auf $P_2 P_3$ vorgegeben, so sind u, v in jedem Punkt des Bereiches eindeutig bestimmt gemäß 1).

Um zu erkennen, welche Vorgaben für die Funktionen u, v auf das charakteristische Anfangswertproblem von 1) führen, gehen wir aus von der Normalform (I 9) und ersetzen dort U, V durch $U = u + \varrho v$ bzw. $V = u + \sigma v$. Nach (I 3), (I 6) können ϱ und σ nicht gleichzeitig verschwinden. Die Gleichungen

$$\text{(III 5)} \qquad (u + \varrho v)_x = A(u + \varrho v) + B(u + \sigma v) + C,$$

$$\text{(III 6)} \qquad (u + \sigma v)_{\overline{x}} = \overline{A}(u + \varrho v) + \overline{B}(u + \sigma v) + \overline{C}$$

betrachten wir längs der durch P_3 gehenden Charakteristiken (s. Bild 4).

Ist u längs der beiden Charakteristiken durch P_3 vorgegeben, so stellt (III 5) eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung längs der Charakteristik $P_2 P_3$ dar und bestimmt damit v bis auf eine Integrationskonstante $v(P^*)$. Ebenso wird (III 6) eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung längs der anderen Charakteristik $P_1 P_3$. Bei ihrer Integration ist die Integrationskonstante so zu wählen, dass der Wert $v(P_3)$ mit dem aus Gleichung (III 5) erhaltenen übereinstimmt. Beginnt man mit Gleichung (III 6) längs der Charakteristik $P_1 P_3$, so kann man die Integrationskonstante so wählen, daß $v(P^{**})$ einen gegebenen Wert annimmt. Daraus folgt:

Sind ϱ und σ von Null verschieden, so führt die Vorgabe der Funktion u auf den beiden durch P_3 gehenden Charakteristiken und des Wertes der Funktion v in irgend einem Punkte einer der beiden Charakteristiken auf das charakteristische Anfangswertproblem von 1) und damit auf eine eindeutige Lösung. Entsprechendes gilt bei der Vorgabe der Funktion v und eines Wertes der Funktion u.

Ist dagegen eine der Größen ϱ oder σ, z. B. $\varrho = 0$, so bleibt bei Vorgabe der Funktion v längs der Charakteristiken der Sachverhalt ungeändert; gibt man dagegen u längs beider Charakteristiken vor,

so läßt sich aus (III 5) v längs der Charakteristik P_2P_3 mittels einer linearen Gleichung berechnen. (III 6) bestimmt dann v eindeutig längs der Charakteristik P_1P_3. Daraus folgt:

Ist $\varrho = 0$ und $B \neq 0$, so sind allein durch Vorgabe der Funktion u längs zweier Charakteristiken die beiden Funktionen u, v als Lösungen des Systems (1) bestimmt.

Zu dem Fall $\varrho = 0$ gelangt man u. a., wenn man von einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung ausgeht (vgl. (I 17)). Man erhält die Normalform (I 19). Es muß daher $u = z$ auf den durch P_3 gehenden Charakteristiken vorgegeben werden oder $v = z_{x^1}$ auf diesen Charakteristiken und u z. B. im Punkt P_3. Für $b = 0$ ergibt sich die Normalform nach (I 19) unmittelbar durch $u = U$, $v = V$. Es braucht dann nur noch $u = z$ auf P_1P_3 und $v = z_{x^1}$ auf P_2P_3 vorgegeben zu werden. Die Setzung $u = z_{x^1}$, $v = z_{x^2}$ führt bei $c = 0$ (I 17) zur Vorgabe von $u = z_{x^1}$ auf P_2P_3, $v = z_{x^2}$ auf P_1P_3.

3) Gemischte Anfangs- und Randwertprobleme für die Normalform (I 9).

Von besonderer Bedeutung ist der Fall, daß längs eines Stückes einer nicht charakteristischen Kurve K die Funktionswerte U, V bzw. u, v vorgegeben sind und längs einer zweiten nicht charakteristischen Kurve R, die von einem Punkt P_1 von K ausgeht und *nicht* mit K im gleichen Winkelraum der durch P_1 gehenden Charakteristiken liegt, gewisse Randwerte der Funktionen U, V bzw. u, v gegeben sind (vgl. Bild 5).

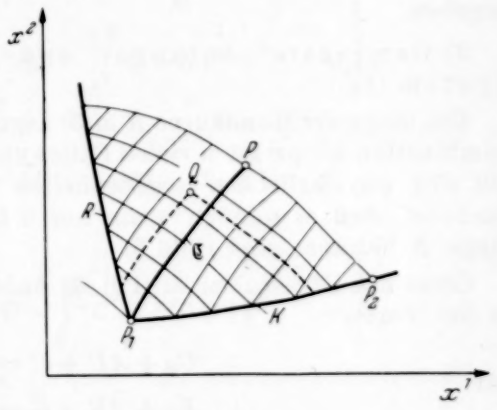

Fig. 5.

Betrachten wir ein Stück von K vom Randpunkt P_1 bis zu irgend einem Punkt P_2, so bestimmen zwei entsprechend durch P_1 und P_2 gehende Charakteristiken ein Gebiet P_1PP_2, das „Einflußgebiet" von K auf P, in dem U, V bzw. u, v als Cauchy'sches Anfangswertproblem über K bestimmt sind. Damit sind beide gesuchten Funktionen längs der Charakteristik P_1P bekannt, und das „gemischte Anfangs- und Randwertproblem" führt auf ein „gemischtes charakteristisches Randwertproblem". Es kommt darauf an zu untersuchen, welche Vorgaben längs des Randes R gemacht werden können, damit beide Funktionen U, V in dem Gebiet RP_1P eindeutig bestimmt sind.

Am einfachsten ist es, wenn wir uns von vornherein auf die Normalform (I 9) beschränken. Ist P_1P eine Charakteristik der Schar $\omega_2 = 0$ (I 13), so können wir längs des Randes R die Funktion U mit $\lim_{R \to P_1} U(R) = U(P_1)$ willkürlich vorgeben, auf der charakteristischen Kurve P_1P sind U, V aus dem „Einflußgebiet" der Anfangskurve K bekannt.

Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz kann in ähnlicher Weise wie in Abschnitt II bewiesen werden. Man geht wieder von einem U^0, V^0 aus, in dem man in (I 9) B und $\overline{A}$ als Null annimmt. Um in Q die U^0, V^0 zu bestimmen (Bild 5), bildet man die entsprechenden Linienintegrale auf den durch Q gehenden Charakteristiken. Dabei beginnen die Integrale für U in den Punkten der Kurve R, in denen U bekannt ist. Die Integrale für V beginnen auf P_1P, wo V bekannt ist. Durch entsprechende Iterationen erhält man die gesuchten Lösungen U, V als Grenzfunktionen.

Unter Beachtung von (I 8) folgt daraus eine Formulierung des „charakteristischen Anfangs- und Randwertproblems" für das System (1).

Ist $\varrho \neq 0$, so folgt aus $(u + \varrho v)_x = A(u + \varrho v) + B(u + \sigma v) + C$, daß es ausreicht, $u + \varrho v$ auf R und v oder u auf PP_1 vorzugeben.

Ist $\varrho = 0$, so ist u auf R und u oder v auf PP_1 vorzugeben.

Ist $U = u$, $V = v$, so ist u auf R und u oder v auf PP_1 vorzugeben.

4) Gemischte Anfangs- und Randwertprobleme für System (1).

Die längs der Randkurve R in 3) angenommene Vorgabe der Linearkombination $u + \varrho v$ ist in vielen Fällen ungeeignet oder in Anwendungen mit den physikalischen Gegebenheiten nicht ausführbar. Wir zeigen zunächst, daß es genügt, wenn nur u längs des Randes R und U, V längs K bekannt sind (Bild 5).

Ohne die Buchstaben in (I 9) zu ändern, schreiben wir (I 9) wieder in der Form

$$\begin{aligned} U_a + AU + C &= BV \\ V_{\overline{a}} + \overline{B}V + \overline{C} &= \overline{A}U. \end{aligned} \tag{III 7}$$

Zunächst ist mit U, V längs K auch sicher V längs der Charakteristik $PP_1 = \mathfrak{C}$ des Einflußgebietes bekannt. Wir werden zeigen, *daß es stets in dem Winkelraum zwischen der Charakteristik* $PP_1 = \mathfrak{C}$ *und der Randkurve* R *ein an den Punkt* P_1 *grenzendes Gebiet gibt, in dem* (III 7) *genau eine Lösung besitzt, die die Vorgaben* $V = \Psi$ *auf* $\mathfrak{C}$ *und* $u = u(R)$ *auf* R *erfüllt.*

Beweis. Durch formale Umformung von (I 8) erhalten wir auf dem Rande R

(III 8) $$U(R) = u(R) + \frac{\varrho(R)}{\sigma(R)}\{V(R) - u(R)\};$$

dabei ist $u(R)$ gegeben, dagegen $V(R)$ noch nicht bekannt.

Wir bestimmen sukzessive Funktionen U^0, V^0, U^1, V^1..... und beginnen, indem wir in (III 7) die rechte Seite der zweiten Gleichung als Null annehmen, mit

(III 9) $$V^0_\alpha + \overline{B}V^0 + \overline{C} = 0;$$

dabei ist $V^0(\mathfrak{C}) = \Psi$. Im beliebigen Punkt Q (s. Bild 5) ergibt sich daraus $V^0(Q)$ zu

(III 10) $$V^0(Q) = e^{-\int_{\mathfrak{C}}^{Q} \overline{B}\,\omega_2}\left\{\Psi - \int_{\mathfrak{C}}^{Q} \overline{C}\, e^{\int_{\mathfrak{C}}^{Q''} \overline{B}\,\omega_2}\,\omega_2\right\}.$$

Damit ist $V^0(R)$ bekannt, woraus sich nach (III 8) auf dem Rand R

(III 11) $$U^0(R) = u(R) + \frac{\varrho(R)}{\sigma(R)}\{V^0(R) - u(R)\}$$

berechnet. Für $U^0(Q)$ gelte gemäß (III 7) die Gleichung

(III 12) $$U^0_x + AU^0 + C = BV^0,$$

wobei $U^0(R)$ durch (III 11) gegeben ist. Daher wird

(III 13) $$U^0(Q) = e^{-\int_{K}^{Q} A\,\omega_1}\left\{U^0(R) - \int_{K}^{Q} (C - BV^0)\, e^{\int_{R}^{Q'} A\,\omega_1}\,\omega_1\right\}.$$

V^n wird bestimmt aus

(III 14) $$V^n_\alpha + \overline{B}V^n + \overline{C} = \overline{A}U^{n-1} \quad \text{mit} \quad V^n(\mathfrak{C}) = \Psi.$$

Man erhält

(III 15) $$V^n(Q) = e^{-\int_{\mathfrak{C}}^{Q} \overline{B}\,\omega_2}\left\{\Psi - \int_{\mathfrak{C}}^{Q} (\overline{C} - \overline{A}U^{n-1})\, e^{\int_{\mathfrak{C}}^{Q''} \overline{B}\,\omega_2}\,\omega_2\right\}.$$

Ebenso wird U^n bestimmt aus

(III 16) $$U^n_\alpha + AU^n + C = BV^n$$

mit

(III 16a) $$U^n(R) = u(R) + \frac{\varrho(R)}{\sigma(R)}\{V^n(R) - u(R)\}.$$

Es wird

(III 17) $$U^n(Q) = e^{-\int_{R}^{Q} A\,\omega_1}\left\{U^n(R) - \int_{K}^{Q} (C - BV^n)\, e^{\int_{R}^{Q'} A\,\omega_1}\,\omega_1\right\}.$$

Da wir die Lösung im Durchschnitt des Winkelraumes mit einer Umgebung des Punktes P_1 bestimmen wollen, sei in diesem Teil G der x^1, x^2-Ebene mit $M > 1$ eine feste Schranke für alle vorkommenden gegebenen Funktionen bezeichnet; insbesondere sei auch

$$M \geqq \frac{\varrho(R)}{\sigma(R)} u(R) \qquad \text{und} \qquad M \geqq \frac{\varphi(R)}{\sigma(R)}.$$

Mit l bezeichnen wir die größte in G auftretende Länge der charakteristischen Kurven. Wir wollen zunächst zeigen, daß es ein gewisses Gebiet G, d. h. eine gewisse Länge l, gibt, so daß alle Funktionen der Folge $U^0, V^0, \ldots, U^n, V^n$ für beliebig großes n unter einer festen Schranke liegen.

Nach (III 10) ist

$$|V^0(Q)| \leqq e^{Ml}(M + Ml e^{Ml}) = e^{Ml} S, \tag{III 18}$$

wenn wir zur Abkürzung setzen

$$S = M + Ml e^{Ml}. \tag{III 18a}$$

Nach (III 11) und (III 18) ergibt sich für $U^0(R)$, also auf dem Rande

$$|U^0(R)| \leqq 2M + M|V^0| \leqq 2M + M e^{Ml} S.$$

In einem Punkt Q von G gilt dann nach (III 13)

$$\begin{aligned} |U^0(Q)| &\leqq e^{Ml}\{2M + M e^{Ml} S + (M + M e^{Ml} S) l e^{Ml}\} \\ &\leqq e^{Ml}\{2M + 2Ml e^{Ml} + e^{Ml} S(M + Ml e^{Ml})\}, \end{aligned}$$

$$|U^0(Q)| \leqq e^{Ml}(2S + e^{Ml} S^2). \tag{III 19}$$

In derselben Weise schätzen wir $V^n(Q)$ und $U^n(Q)$ ab, dabei wollen wir mit $\overline{U}^{n-1}$ eine Majorante von U^{n-1} bezeichnen. Aus (III 15) folgt sofort

$$\begin{aligned} |V^n(Q)| &\leqq e^{Ml}\{M + (M + M\overline{U}^{n-1}) l e^{Ml}\} \\ &\leqq e^{Ml}\{S + lM e^{Ml} \overline{U}^{n-1}\}. \end{aligned} \tag{III 20}$$

Etwas mühsamer ist die Abschätzung von $U^n(Q)$. Zunächst folgt aus (III 17), (III 16a) unter Beachtung von (III 20)

$$\begin{aligned} |U^n(Q)| \leqq e^{Ml}\{2M + M e^{Ml}(S + lM e^{Ml}\overline{U}^{n-1}) \\ + l[M + M e^{Ml}(S + lM e^{Ml}\overline{U}^{n-1})] e^{Ml}\}. \end{aligned}$$

Fügen wir in der Klammer noch $lM e^{Ml}$ hinzu, so ist

$$\begin{aligned} |U^n(Q)| &\leqq e^{Ml}\{2M + 2Ml e^{Ml} + e^{Ml} S(M + Ml e^{Ml}) \\ &\qquad + \overline{U}^{n-1} Ml e^{2Ml}(M + Ml e^{Ml})\} \\ &\leqq e^{Ml}\{2S + e^{Ml} S^2 + \overline{U}^{n-1} Ml e^{2Ml} S\}. \end{aligned}$$

Um den Zusammenhang mit (III 19) zu verdeutlichen, schreiben wir das Ergebnis in der Form

$$|U^n(Q)| \leqq e^{Ml}(2S + e^{Ml}S^2) + SMle^{3Ml}\cdot \overline{U}^{n-1}. \tag{III 21}$$

Damit haben wir eine Rekursionsformel gewonnen, die nur Majoranten der Funktionen $U^0, U^1, \ldots$ enthält. Führen wir die Abkürzungen ein

$$\Gamma = e^{Ml}(2S + e^{Ml}S^2); \quad \varkappa = S\cdot Mle^{3Ml},$$

dann wird nach (III 19) und (III 21)

$$\begin{aligned} |U^0(Q)| &\leqq \Gamma \\ |U^1(Q)| &\leqq \Gamma(1+\varkappa) \\ |U^2(Q)| &\leqq \Gamma[1+\varkappa(1+\varkappa)] \end{aligned}$$

und schließlich

$$|U^n(Q)| \leqq \Gamma(1+\varkappa+\varkappa^2+\cdots+\varkappa^n). \tag{III 21 a}$$

Daraus folgt sofort: *Es gibt eine Zahl N derart, daß*

$$|U^n(Q)| < N$$

für alle n, wenn die in (III 21 a) *rechts stehende Summe für* $\lim n \to \infty$ *konvergiert*, d. h. wenn $\varkappa < 1$. Das ist der Fall, wenn wir unser Gebiet G so einschränken, daß

$$\varkappa = SMle^{3Ml} < 1. \tag{III 22}$$

Beachten wir (III 20), so folgt unmittelbar, daß auch alle Funktionen $V^n(Q)$ im Gebiet G eine gemeinsame Schranke haben.

Wir zeigen nun weiter: *In dem durch* (III 22) *bestimmten Gebiet G konvergiert das Iterationsverfahren gleichmäßig gegen stetige Funktionen U, V mit $V(\mathfrak{S}) = \mathfrak{P}$ und*

$$U(R) = u(R) + \frac{\varrho(R)}{\sigma(R)}\{V(R) - u(R)\}.$$

Es ist

$$|V^1 - V^0| < NMle^{2Ml}. \tag{III 23}$$

Die Abschätzung von $|U^1 - U^0|$ ergibt sich aus (III 17), (III 13) unter Beachtung von (III 11), (III 16 a) zu

$$|U^1 - U^0| < e^{Ml}\{NM^2l(e^{Ml})^2 + N(Ml)^2(e^{Ml})^3\},$$

$$|U^1 - U^0| < NSMl(e^{Ml})^3; \quad S = M + e^{Ml}Ml. \tag{III 24}$$

Wir machen die Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned} |V^n - V^{n-1}| &< NS^{n-1}(e^{Ml})^{3n-1}(Ml)^n \\ |U^n - U^{n-1}| &< NS^n(e^{Ml})^{3n}(Ml)^n. \end{aligned} \tag{III 25}$$

Es folgt mit den gleichen Überlegungen wie bei (III 23), (III 24) aus (III 15), (III 17)

$$
\begin{aligned}
&|V^{n+1}-V^n| < N S^n (e^{Ml})^{3(n+1)-1} (Ml)^{n+1}\\
&|U^{n+1}-U^n| < e^{Ml}\{N M S^n (e^{Ml})^{3(n+1)-1} (Ml)^{n+1}\\
&\qquad\qquad + Ml N S^n (e^{Ml})^{3(n+1)} (Ml)^{n+1}\}\\
&\qquad < N S^n (e^{Ml})^{3(n+1)} (Ml)^{n+1}\{M + Ml e^{Ml}\}
\end{aligned}
\tag{III 26}
$$

und daraus mit $S = M + Ml e^{Ml}$

$$|U^{n+1}-U^n| < N S^{n+1} (e^{Ml})^{3(n+1)} (Ml)^{n+1}.$$

Nach (III 22) ist aber überall in G die Ungleichung erfüllt

$$S(e^{Ml})^3 Ml < 1,$$

daher konvergieren die Summen

$$V^0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (V^\nu - V^{\nu-1})$$

und

$$U^0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (U^\nu - U^{\nu-1})$$

gegen stetige Grenzfunktionen U, V. Wegen der Gleichmäßigkeit der Konvergenz darf in (III 15), (III 17) der Grenzübergang unter den Integralen vorgenommen werden. Es wird

$$V(Q) = e^{-\int_{\mathfrak{C}}^{Q} \bar{B}\,\omega_2}\left\{\Psi - \int_{\mathfrak{C}}^{Q} (\bar{C} - \bar{A}U)\, e^{\int_{\mathfrak{C}}^{Q''} \bar{B}\,\omega_2}\,\omega_1\right\} \tag{III 27}$$

und

$$U(Q) = e^{-\int_{R}^{Q} A\,\omega_1}\left\{U(R) - \int_{R}^{Q} (C - BV)\, e^{\int_{R}^{Q'} A\,\omega_1}\,\omega_1\right\} \tag{III 28}$$

mit

$$U(R) = u(R) + \frac{\varrho(R)}{\sigma(R)}\{V(R) - u(R)\}. \tag{III 29}$$

Beachtet man (I 8), so erkennt man sofort, daß u auf R die vorgegebenen Werte $u(R)$ und V auf $\mathfrak{C}$ die Werte Ψ annimmt. Durch Differentiation von (III 27), (III 28) in Richtung α, bzw. $\bar{\alpha}$ folgt das Erfülltsein von (III 7).

Damit ist die *Existenz einer Lösung des „charakteristischen Anfangs- und Randwertproblems"* bei den Vorgaben V auf $PP_1 = \mathfrak{C}$ und u auf R bewiesen mit stetigen Ableitungen $V_\alpha = (u + \sigma v)_{\bar{\alpha}}$ und $U_\alpha = (u + \varrho v)_\alpha$.

Zur Frage der Eindeutigkeit nehmen wir an, es gäbe zwei Lösungen U_1, V_1 und U_2, V_2 mit $V_1(\mathfrak{C}) = V_2(\mathfrak{C}) = \Psi$. Mit entsprechenden Maximalwerten μ_1, μ_2 wie bei (II 15) wird nach (III 27), (III 28) und (III 29)

$$\text{(III 30)} \qquad \begin{aligned} |V_1 - V_2| &\leqq e^{2Ml} M l \mu_1 \leqq \varkappa \mu_1 \\ |U_1 - U_2| &\leqq e^{Ml}\{M^2 l e^{2Ml} + e^{3Ml}(Ml)^2\}\mu_2 \leqq \varkappa \mu_2 \end{aligned}$$

wegen (III 22) und (III 18a). Daher ist genau wie im Abschnitt II $\mu_1 = \mu_2 = 0$.

Damit ist die am Anfang von 4) aufgestellte Behauptung bewiesen. Der Beweis ist geführt unter den Voraussetzungen der Stetigkeit der Koeffizienten von (III 7). Es sind die gleichen Voraussetzungen, die früher unter (I 9), (I 10), (I 11) gemacht wurden; dazu kommt $\sigma \neq 0$ auf R und stetige Vorgaben auf $PP_1 = \mathfrak{C}$ und R.

Aus dem gegebenen Existenzsatz folgen unmittelbar *Sätze für die Lösungen des allgemeinen Systems* (1) unter Beachtung, daß längs der Charakteristik $PP_1 = \mathfrak{C}$ die Gleichung gilt:

$$\text{(III 31)} \qquad (u + \varrho v)_a = A(u + \varrho v) + B(u + \sigma v) + C.$$

Erfüllt das allgemeine System (1) die Voraussetzungen des Abschnittes II, so gibt es eine eindeutige und stetige bzw. stetig differenzierbare Lösung u, v derart, daß

I. auf dem Rande R die Funktion $u(R)$ und auf der Charakteristik $\mathfrak{C}$ die Funktion $v(\mathfrak{C})$ gegebene Werte annimmt; $(\sigma \neq 0)$

oder

II. auf dem Rande R und auf der Charakteristik $\mathfrak{C}$ die Funktion u vorgegebene Werte annimmt und v in einem Punkt von $\mathfrak{C}$ vorgegeben ist; $(\sigma \neq 0)$

oder

III. v auf R und u auf $\mathfrak{C}$ gegeben sind; $(\varrho \neq 0)$

oder

IV. v auf R und $\mathfrak{C}$, aber u nur in einem Punkt auf $\mathfrak{C}$ gegeben sind $(\varrho \neq 0)$.

Darüber hinaus läßt sich der Existenzsatz erweitern auf das folgende gemischte charakteristische Anfangswertproblem:

Längs des Randes R ist eine beliebige Funktion $\Phi(u, v)$ und auf der Charakteristik $\mathfrak{C}$ etwa $u + \sigma v$ vorgegeben, derart, daß $\begin{vmatrix} 1 & \sigma \\ \Phi_u & \Phi_v \end{vmatrix} \neq 0$ auf R. Statt der Vorgabe längs der Charakteristik $\mathfrak{C}$ kann man u, v längs der beliebigen Anfangskurve K durch P_1 vorgeben und $\Phi(u, v)$ längs R wie oben.

Hierin ist auch der in der Strömungslehre wichtige Fall enthalten, daß das Verhältnis der Geschwindigkeitskomponenten auf einer Randkurve vorgegeben ist.

Es würde zu weit führen, auf alle Fallunterscheidungen einzugehen.

(Eingegangen am 10. März 1950.)

Mathematische Zeitschrift, Band 53, Heft 3, S. 267—272 (1950).

Über die Fourierkoeffizienten einer zusammengesetzten Funktion.

Von

U. T. Bödewadt in Göttingen.

In einer früheren Arbeit des Verf. ([1]) waren für den Sinus und Kosinus eines als Fourierreihe gegebenen Argumentes $x(t) = x(t+2\pi)$ die Entwicklungskoeffizienten als Produktsumme von Besselfunktionen ganzzahliger Ordnung angegeben worden. Kürzlich ist nun von Herrn M. Pagni ([2]) das allgemeinere Problem aufgegriffen worden: Von $y = f(x) = f(x+2\pi)$ und von $x(t) = x(t+2\pi)$ seien die Fourierkoeffizienten bekannt; wie berechnen sich aus ihnen die von $y = g(t) = f(x(t))$? Physikalisch kann z. B. t die Zeit bedeuten, x die Phase eines Schwingers, y die Rückstellkraft. — Die Aufgabe ist immerhin so verwickelt, daß die Lösung nicht gut durch eine einzige Formel gegeben werden kann, sondern nur in mehreren Schritten aus einem System von Formeln zu gewinnen ist. Pagni hat a. a. O. die letztlich gesuchten Koeffizienten von $g(t)$ zunächst als Funktion der Koeffizienten von $f(x)$ und von $\cos r \cdot x(t)$, $\sin r \cdot x(t)$ $(r = 1, 2, \ldots)$ dargestellt; diese wieder drückt er mittels der Potenzreihe durch die Koeffizienten von $x(t)^k$ aus. Diese Formeln für die Potenzen einer Fourierreihe werden aber nicht in expliziter Gestalt angeführt, sondern es wird lediglich auf die Formel für das Produkt zweier Fourierreihen verwiesen, aus der die benötigten Formeln rückläufig durch wiederholte Multiplikation zu gewinnen sind.

Die vorliegende Mitteilung gibt die entsprechende Ergänzung zu den in [1] aufgestellten Formeln und erörtert die Beziehungen zu den Formeln von Pagni.

1.

Es seien $f(x) = f(x+2\pi)$ und $x(t) = x(t+2\pi)$ stetig und von beschränkter Schwankung, so daß ihre Fourierentwicklungen

$$f(x) = \tfrac{1}{2} c_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (c_m \cos m x + d_m \sin m x), \tag{1}$$

$$x(t) = \tfrac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n t + b_n \sin n t) \tag{2}$$

gleichmäßig konvergieren. Dasselbe läßt sich von der zusammengesetzten Funktion $f(x(t))$ aussagen, falls auch ihre Schwankung beschränkt ist:

$$f(x(t)) = \tfrac{1}{2}\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n \cos n t + \beta_n \sin n t). \tag{3}$$

Setzt man nun in die aus (3) folgenden Formeln für α_n, β_n die Reihe (1) ein, so ergibt sich durch gliedweise Integration zum Beispiel:

$$\alpha_0 = c_0 + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\{c_m \cos m x(t) + d_m \sin m x(t)\}\, d t. \tag{4}$$

Da aber in der Entwicklung von $\cos m x(t)$, $\sin m x(t)$ das feste Glied $\frac{1}{2}a_0$ von (2) störend wirkt, so empfiehlt es sich, was nur eine Verschiebung der x-Skala bedeutet, zu setzen:

$$x(t) = \tfrac{1}{2}a_0 + \xi(t), \tag{5}$$

$$\xi(t) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n t + b_n \sin n t). \tag{6}$$

Die Formel (4) geht dann, wenn man noch

$$\begin{aligned}\gamma_m &= c_m \cos \tfrac{1}{2} m a_0 + d_m \sin \tfrac{1}{2} m a_0,\\ \delta_m &= d_m \cos \tfrac{1}{2} m a_0 - c_m \sin \tfrac{1}{2} m a_0\end{aligned} \tag{7}$$

einführt, über in

$$\alpha_0 = c_0 + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\{\gamma_m \cos m \xi(t) + \delta_m \sin m \xi(t)\}\, d t. \tag{8}$$

Nun gelten die Entwicklungen ([1], Formeln (3))

$$\begin{aligned}\cos m \xi(t) &= \tfrac{1}{2}A_0^{(m)} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n^{(m)} \cos n t + B_n^{(m)} \sin n t),\\ \sin m \xi(t) &= \tfrac{1}{2}C_0^{(m)} + \sum_{n=1}^{\infty}(C_n^{(m)} \cos n t + D_n^{(m)} \sin n t),\end{aligned} \tag{9}$$

und durch Einsetzen in (8) und die entsprechenden Formeln für α_n, β_n erhält man

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= c_0 + \sum_{m=1}^{\infty}(\gamma_m A_0^{(m)} + \delta_m C_0^{(m)}),\\ \alpha_n &= \sum_{m=1}^{\infty}(\gamma_m A_n^{(m)} + \delta_m C_n^{(m)}),\\ \beta_n &= \sum_{m=1}^{\infty}(\gamma_m B_n^{(m)} + \delta_m D_n^{(m)}).\end{aligned} \tag{10}$$

Auf der rechten Seite sind γ, δ durch (7) gegeben, während A, B, C, D sich aus den Koeffizienten a_n, b_n von $x(t)$ nach den Gleichungen (11) berechnen lassen ([1], Formel 3 c):

$$(11\,a)\quad A_n^{(m)},\ B_n^{(m)},\ C_n^{(m)},\ D_n^{(m)} = 2\sum_{(p,\,q)}(-1)^{[\frac{1}{2}P]}\prod_{\nu=1}^{\infty} J_{p_\nu}(m\,a_\nu)\,J_{q_\nu}(m\,b_\nu).$$

Dabei können die Parameter p_ν, q_ν an sich alle ganzzahligen Werte $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ annehmen. Doch sind in jedem Produkt nur endlichviele der p_ν $q_\nu \neq 0$, und zwar kommen nur solche Kombinationen in Betracht. welche die Eigenschaft

$$(11\,b)\qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu(p_\nu + q_\nu) = n$$

haben. Zur Unterscheidung der Koeffizienten A, B, C, D dient die Vorschrift, daß von den Summen $P = \sum p_\nu$, $Q = \sum q_\nu$ für A und D die Summe P, bei A und C aber Q gerade sein muß, hingegen P ungerade für B und C sowie Q bei B und D. Sooft dabei a_ν oder $b_\nu = 0$ wird, kommt nur $p_\nu = 0$ bzw. $q_\nu = 0$ in Betracht. Die Summe in (11 a) ist über alle nach diesen Vorschriften zulässigen Kombinationen (p, q) zu erstrecken.

Mit den Formeln (10), (7), (11) ist es möglich, die Koeffizienten von $f(x(t))$ aus denen von $f(x)$ und $x(t)$ zu errechnen. Man kann (7) und (11) in (10) einsetzen, ohne daß dabei aber Vereinfachungen oder neue Zusammenfassungen sichtbar würden.

2.

Zur Erleichterung des Vergleichs mit den Ergebnissen von Pagni ist es zweckmäßig, in (2) $a_0 = 0$ anzunehmen. Dann stimmen die in [2] gebrachten Formeln (5) mit den hier unter (10) genannten überein (abgesehen von der Bezeichnungsweise). Um die hier durch (9) erklärten und mittels (11) berechenbaren Beizahlen A, B, C, D zu erhalten, nennt Pagni auf Grund der Potenzreihenentwicklung der Cosinus- und Sinus-Funktion abschließend die Gleichungen

$$(12)\qquad \begin{aligned} A_n^{(m)} &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\, m^{2k}\, a_n^{(2k)}/(2k)!\\ B_n^{(m)} &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\, m^{2k}\, b_n^{(2k)}/(2k)!\\ C_n^{(m)} &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\, m^{2k+1}\, a_n^{(2k+1)}/(2k+1)!\\ D_n^{(m)} &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\, m^{2k+1}\, b_n^{(2k+1)}/(2k+1)! \end{aligned}$$

Darin sind

$$(13)\qquad a_n^{(k)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} [x(t)]^k \cos n\,t\,dt;\ b_n^{(k)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} [x(t)]^k \sin n\,t\,dt$$

die Fourierbeizahlen der Potenzen von $x(t)$. Grundsätzlich sind sie

aus den Beizahlen von $x(t)$ berechenbar, indem man wiederholt die Formel für die Multiplikation zweier Fourierreihen anwendet. Die Ausführung dieser Andeutung ([2], S. 366) kann ersetzt werden durch die Benutzung der unmittelbaren Formeln für die Potenzen einer Fourierreihe, welche hier (ohne Eingehen auf die Konvergenzverhältnisse) noch aufgeführt sein mögen:

Die Reihe (2) läßt sich mittels der Festsetzungen

$$a_{-n} = +a_n;\ b_{-n} = -b_n \tag{14}$$

auch in der komplexen Gestalt

$$x(t) = \tfrac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (a_n + i\,b_n)\ \mathrm{cis}\ n\,t \tag{15}$$

wiedergeben, wobei die zeilenrechte Schreibweise

$$\mathrm{cis}\ t = \cos t + i \sin t = \exp i\,t = e^{it} \tag{16}$$

zu häufigerer Benutzung anstelle der sonst üblichen in geeigneten Fällen empfohlen sein möge (obschon sie im vorliegenden Falle gerade entbehrlich wäre). Durch Potenzieren von (15) folgt, wenn die in (13) gesetzten Definitionen entsprechend (14) auch für negative n angewandt werden:

$$[x(t)]^k = \tfrac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (a_n^{(k)} + i\,b_n^{(k)})\ \mathrm{cis}\ n\,t \tag{17}$$

mit folgender Bedeutung der Beizahlen (13):

$$a_n^{(k)} + i\,b_n^{(k)} = 2^{1-k} \sum_{(\nu)} \prod_{j=1}^{k} (a_{\nu_j} + i\,b_{\nu_j}). \tag{18}$$

Zu summieren ist dabei über alle $(\nu) = \{\nu_j\}$, $j = 1, \ldots, k$ mit ganzzahligen $-\infty < \nu_j < +\infty$ und $\sum \nu_j = n$. Die Aufspaltung in den reellen und den imaginären Anteil ergibt

$$\begin{aligned} a_n^{(k)} &= 2^{1-k} \sum_{(\nu)} \sum_{\lambda=0}^{k} (-1)^\lambda \binom{k}{2\lambda}\, b_{\nu_1} \ldots b_{\nu_{2\lambda}}\, a_{\nu_{2\lambda+1}} \ldots a_{\nu_k}, \\ b_n^{(k)} &= 2^{1-k} \sum_{(\nu)} \sum_{\lambda=0}^{k} (-1)^\lambda \binom{k}{2\lambda+1}\, b_{\nu_1} \ldots b_{\nu_{2\lambda+1}}\, a_{\nu_{2\lambda+2}} \ldots a_{\nu_k} \end{aligned} \tag{19}$$

mit den gleichen Bedingungen für die Zeiger ν_j wie bei (18). Zum Beispiel ist für $k = 3$:

$$\begin{aligned} a_n^{(3)} &= \tfrac{1}{4} \sum_{\varkappa,\lambda,\mu} (a_\varkappa\, a_\lambda\, a_\mu - 3\, b_\varkappa\, b_\lambda\, a_\mu), \\ b_n^{(3)} &= \tfrac{1}{4} \sum_{\varkappa,\lambda,\mu} (3\, b_\varkappa\, a_\lambda\, a_\mu - b_\varkappa\, b_\lambda\, b_\mu) \end{aligned}$$

mit

$$\varkappa + \lambda + \mu = n;\ -\infty < \varkappa, \lambda, \mu < +\infty.$$

Nun treten in dieser Formel Glieder wie $a_{-2}\, a_5\, a_{-2}$, $a_5\, a_{-2}\, a_{-2}$, $a_{-2}\, a_{-2}\, a_5$

an verschiedenen Stellen auf. Will man sie gleich formelmäßig zusammenfassen, so kann man die Polynomialformel von Leibniz benutzen. In der Anwendung auf beliebig lange Folgen kann man sie so aussprechen: Der aus einer Folge $\{a_\mu\}$ zu bildende Ausdruck

$$(20\,a)\quad H = \sum_{(\mu)} \prod_i a_{\mu_i} \text{ mit } i = 1, \ldots, l;\ \sum \mu_i = m;\ \mu_i = \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots,$$

in dem die zu verschiedenen i gehörigen μ nicht verschieden zu sein brauchen, läßt sich durch Zusammenfassung der nur durch die Reihenfolge der Faktoren unterschiedenen Produkte auf die Gestalt

$$(20\,b)\qquad H = \sum_{(\lambda)} l! \prod_\mu \frac{1}{\lambda(\mu)!}\, a_\mu^{\lambda(\mu)},$$

bringen, worin jetzt die zulässigen Zusammenstellungen (λ) der Exponenten λ_μ, über welche summiert werden soll, gemäß folgenden Bedingungen auszusuchen sind:

$$(20\,c)\qquad \begin{aligned} &\nu = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots;\ \lambda_\nu = 0, 1, 2, \ldots; \\ &\sum \lambda(\mu) = l;\ \sum \mu \cdot \lambda(\mu) = m. \end{aligned}$$

Es können demnach in jedem Gliede nur endlichviele von Null verschiedene λ_μ auftreten. — Man kann eine noch stärker zusammengefaßte Form für H aufstellen, indem man nach den Häufigkeiten $r(\lambda)$ der einzelnen Exponenten λ anordnet:

$$(21\,a)\qquad H = \sum_{(r)} l! \prod_{\lambda=1}^{l} (\lambda!)^{-r(\lambda)} \sum_{(\mu)} \prod_{\varepsilon=1}^{r(\lambda)} a^{\lambda}_{\mu(\varepsilon,\lambda)};$$

die Zusammenstellungen (r) und (μ), über welche hier zu summieren ist, sind durch diese Bedingungen bestimmt:

$$(21\,b)\quad (r) = (\ldots r(\lambda) \ldots),\ \lambda = 1, \ldots, l,\ 0 \leqq r(\lambda) \leqq l,\ \sum_{\lambda=1}^{l} \lambda \cdot r(\lambda) = l;$$

$$(\mu) = (\ldots \mu(\lambda, \varepsilon) \ldots),\ \varepsilon = 1, \ldots, r(\lambda),\ -\infty < \mu(\lambda, \varepsilon) < +\infty,$$

$$(21\,c)\qquad \sum_{\lambda=1}^{l} \lambda \cdot \sum_{\varepsilon=1}^{r(\lambda)} \mu(\lambda, \varepsilon) = m;\ \mu(\lambda, \varepsilon) \neq \mu(\lambda', \varepsilon') \text{ für } \lambda \neq \lambda',$$

$$\mu(\lambda, \varepsilon) < \mu(\lambda, \varepsilon') \text{ für } \varepsilon < \varepsilon'.$$

Es ist zum Beispiel im Falle $l = 4$:

$$\sum_{(\nu)} c_{\nu_1} c_{\nu_2} c_{\nu_3} c_{\nu_4} = \sum\nolimits_1 c_\nu^4 + 4 \sum\nolimits_2 c_\mu^3 c_\nu + 6 \sum\nolimits_3 c_\mu^2 c_\nu^2 + 12 \sum\nolimits_4 c_\lambda c_\mu c_\nu^2 + 24 \sum\nolimits_5 c_\varkappa c_\lambda c_\mu c_\nu;$$

läuft links die Summe über alle $(\nu) = (\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4)$ mit $\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 = n$, so läuft rechts $\sum_1$ über alle ν mit $4\nu = n$; $\sum_2$ über alle (μ, ν) mit $\mu \neq \nu$, $3\mu + \nu = n$; $\sum_3$ über alle (μ, ν) mit $\mu < \nu$, $2\mu + 2\nu = n$; $\sum_4$ über alle (λ, μ, ν) mit $\lambda < \mu \neq \nu \neq \lambda$, $\lambda + \mu + 2\nu = n$; $\sum_5$ über alle $(\varkappa, \lambda, \mu, \nu)$ mit $\varkappa < \lambda < \mu < \nu$, $\varkappa + \lambda + \mu + \nu = n$.

Hier ist aber die minder komprimierte Form von (20b) vorzuziehen, durch welche (19) übergeht in

$$(22a) \qquad a_n^{(k)},\ b_n^{(k)} = \frac{k!}{2^{k-1}} \sum_{(\lambda,\mu)} (-1)^{[\frac{1}{2}M]} \prod_{\nu} \frac{a_\nu^{\lambda(\nu)}}{\lambda(\nu)!} \cdot \frac{b_\nu^{\mu(\nu)}}{\mu(\nu)!}$$

mit den Summationsbedingungen

$$-\infty < \nu < +\infty;\ 0 \leqq \lambda(\nu),\ 0 \leqq \mu(\nu);$$

$$(22b) \qquad \sum [\lambda(\nu) + \mu(\nu)] = k,\ \sum \nu\,[\lambda(\nu) + \mu(\nu)] = n;$$

$$\sum \mu(\nu) = M,\ M \equiv 0 \pmod 2 \text{ für } a_n^{(k)},\ M \equiv 1 \pmod 2 \text{ für } b_n^{(k)}.$$

Soweit einzelne a_ν oder b_ν gleich Null sind, hat man auch die entsprechenden $\lambda(\nu)$ oder $\mu(\nu)$ null zu setzen und die Potenzen $a_\nu^{\lambda(\nu)}$, $b_\nu^{\mu(\nu)}$ gleich Eins.

Diese Formel (22) stellt also den Zusammenhang zwischen (15) und (17) dar, das heißt, sie ist die Formel zur Potenzierung einer Fourierreihe. Die Symmetrieeigenschaft (14) ist dabei nicht verwendet worden, (22) gilt somit auch für nichtreelle Fourierreihen (15), während sich durch die Beschränkung auf reelle Reihen im allgemeinen keine Vereinfachungen ergeben.

Die Einsetzung der Potenzierungsformel (22) in (12) ergibt dann Potenzreihen für die Fourierbeizahlen A, B, C, D in den a_ν, b_ν. Diese müssen infolge der Eindeutigkeit der Potenzreihenentwicklung mit denjenigen übereinstimmen, die man aus (11) durch Potenzreihenentwicklung der Besselfunktionen und Umordnen erhalten kann; doch erfordert die unmittelbare Bestätigung dieser Übereinstimmung eine recht langwierige Rechnung. Jedenfalls sind diese durch Kombination von (22) und (12) zu erhaltenden Reihen, auf die die in [2] angedeutete Berechnungsweise führt, in Bezug auf ihre Summationsbedingungen erheblich unbequemer als die Gleichungen (11), welche in dieser Hinsicht etwa den Formeln (22) allein zu vergleichen sind. Für praktische Rechnungen würde also wohl die Darstellung (11) vorzuziehen sein, da sich für Besselfunktionen heutigentags genügend Tafeln finden.

Literatur.

U. T. Bödewadt.

[1] Die Fourierentwicklung des Sinus, Cosinus und der Umkehrung einer Fourierreihe. Mathematische Zeitschrift **47** (1942), 655—662.

Mauro Pagni.

[2] Sui coefficienti di Fourier di una funzione di funzione. Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. nat., VIII. s. **5** (1948), 363—368.

(Eingegangen am 13. März 1950.)

Mathematische Zeitschrift, Band 53, Heft 3, S. 273–284 (1950).

Über die Entwickelbarkeit von Funktionen in verallgemeinerte Dirichletsche Reihen.

Von

N. Stuloff in München.

§ 1.

Den Gegenstand der folgenden Betrachtungen bilden die Dirichletschen Reihen der Form

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\lambda_\nu x} \qquad (a_\nu > 0,\ \lambda_\nu \geqq 0,\ x \geqq 0).$$

Dabei sollen die sonst üblichen Einschränkungen fallen gelassen werden, wonach die (λ_ν) eine mit wachsendem ν monoton ins Unendliche wachsende Zahlenfolge bilden. Es soll von den λ_ν nur verlangt werden, daß sie sämtlich nicht negativ sind, sonst aber eine beliebige abzählbare Folge sein können. Demnach können also die λ_ν beliebig viele Häufungspunkte im Endlichen besitzen und insbesondere im ganzen Intervall $0 < \lambda_\nu < \infty$ dicht liegen. Verallgemeinerungen solcher Art sind bereits untersucht worden[1]) für Reihen der Form

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu\ e^{-\lambda_\nu s},$$

wo $s = \sigma + it$ eine komplexe Variable bedeutet. Wenn diese Reihe gleichmäßig konvergiert, so stellt sie bekanntlich eine fastperiodische Funktion der Variablen s dar.

Das Ziel dieses Aufsatzes besteht nun darin, Aussagen über die Funktion $f(x)$ zu machen, die nur im Reellen bleiben.

Diese Frage ist für den Fall der monoton ins Unendliche wachsenden Dirichlet-Exponenten λ_ν bereits behandelt worden[2]). Die dortige Untersuchung basiert darauf, daß bekanntlich eine Dirichletsche Reihe, deren Exponenten der soeben erwähnten Monotoniebedingung genügen, sich als Stieltjessches Momentintegral $\int_0^1 u^x\, d\chi(u)$ schreiben läßt, wobei die Belegungsfunktion $\chi(u)$ eine in $0 \leqq u \leqq 1$ definierte monoton wachsende

[1]) H. Bohr, „Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen", Acta Math. 47 (1926), S. 237–281.

[2]) Th. Kaluza, „Entwickelbarkeit von Funktionen in Dirichletsche Reihen", Math. Zeitschr. 28 (1928), S. 203–215.

Funktion ist, die im Inneren des Integrationsintervalles keine Häufungsstellen ihrer Sprünge besitzt und außerhalb der Sprünge konstant verläuft, also keine stetigen Wachstumsstellen hat. Die Richtigkeit dieser Aussage ist sofort aus der Definition des STIELTJESschen Integrals

$$\lim_{\text{Max}\,|u_\nu - u_{\nu-1}| \to 0} \sum_{\nu=1}^{k} \xi_\nu^x [\chi(u_\nu) - \chi(u_{\nu-1})] = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \vartheta_\nu^{x\,[3]},$$

wo ϑ_ν die Sprungstellen, a_ν die zugehörigen Größen der Sprünge sind, zu ersehen, wenn man noch $\vartheta_\nu = e^{-\lambda_\nu}$ setzt.

Wenn wir nun zulassen, daß die λ_ν und folglich auch die $\vartheta_\nu = e^{-\lambda_\nu}$ beliebige Häufungsstellen haben, so gibt es zwar auch eine Belegungsfunktion mit entsprechenden Eigenschaften. Es ist aber zunächst nicht einzusehen, daß ihre Momentfunktion gleich der Reihe ist. Wir werden aber zeigen, daß das doch zutrifft, und wollen darüber hinaus die a_ν und λ_ν garnicht als gegeben ansehen, sondern aus der Funktion $f(x)$ ermitteln. Dabei ergibt sich der

Hauptsatz. *Notwendig und hinreichend für die Entwickelbarkeit einer für $x \geqq 0$ definierten Funktion $f(x)$ in eine für $x \geqq 0$ konvergente (oder abbrechende)* DIRICHLETsche *Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\lambda_\nu x}$ mit zunächst noch unbekannten $a_\nu > 0$ und $\lambda_\nu \geqq 0$ ist, daß*

1) $f(x)$ stetig ist für $x \geqq 0$,

2) $f(x)$ beliebig oft differenzierbar ist für $x > 0$,

3) $(-1)^n f^{(n)}(x) \geqq 0$ ist für alle $x > 0$ und alle $n = 0, 1, 2, \ldots$

4) $\sum_{0 < \Lambda < \infty} \lim_{n \to \infty} \left(-\frac{e}{\Lambda}\right)^n f^{(n)}\left(\frac{n}{\Lambda}\right) + \lim_{n \to \infty} f(n) = f(0)$ ist.

Die in 4) stehende Summe ist dabei in Anschluß an Herrn H. BOHR[4]) so zu verstehen, daß die Funktion von Λ unter dem Summenzeichen nur für eine höchstens abzählbare Menge von Λ von 0 verschieden ist, über die dann zu summieren ist[5]). Aus diesen Λ_ν ($\nu = 1, 2, \ldots$) ergeben sich die DIRICHLET-Exponenten

---

[3]) O. PERRON, „Die Lehre von den Kettenbrüchen", Leipzig 1929, S. 362—367.

[4]) H. BOHR, „Fastperiodische Funktionen", Ergebnisse der Math. u. ihrer Grenzgebiete, I (1932) S. 463 (Heft 5, S. 43) unten. Danach ist der in 4) stehende Ausdruck **formal** als Summe über die überabzählbare Menge aller Zahlen $0 < \Lambda < \infty$ zu verstehen. In der erwähnten Schrift wird diese Schreibweise auf Reihen der Form $\sum_{-\infty < \lambda < \infty} a(\lambda) e^{i\lambda x}$ angewendet.

[5]) Daß die Funktion unter dem Summen-Zeichen nur für eine höchstens abzählbare Menge von Λ-Werten von 0 verschieden ist, braucht dabei nicht als neue Forderung aufgenommen zu werden, sondern ist, wie in § 2, S. 277—279 bewiesen wird, als Folge der Forderungen 1), 2) und 3) von selbst erfüllt.

$$\lambda_\nu = \Lambda_\nu$$

und die dazugehörigen Koeffizienten aus

$$a_\nu = \lim_{n \to \infty} \left(-\frac{e}{\lambda_\nu}\right)^n f^{(n)}\left(\frac{n}{\lambda_\nu}\right) \quad \text{für} \quad 0 < \lambda_\nu < \infty$$

und

$$a_\nu = \lim_{n \to \infty} f(n) \qquad \text{für} \quad \lambda_\nu = 0 .$$

§ 2.

Wir zeigen zunächst die Notwendigkeit der Bedingungen. Es sei jetzt also eine für $x \geqq 0$ konvergente (oder abbrechende) Dirichletsche Reihe

$$(1) \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\lambda_\nu x} \quad \text{mit} \quad a_\nu > 0 \quad \text{und} \quad \lambda_\nu \geqq 0$$

vorgelegt. Da $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ konvergiert, ist die Bedingung 1) selbsverständlich erfüllt. Die Bedingung 2) wäre auch sofort einleuchtend, wenn man sich auf die Theorie der analytischen Funktionen komplexen Argumentes berufen würde. Da aber, wie in der Einleitung bemerkt, nur im Reellen gearbeitet werden soll, so wollen wir, um die Reinheit der Methode zu wahren, den Beweis dafür erbringen, zumal er abweichend ist von dem Beweis im Falle der monoton wachsenden λ_ν.

Satz 1. *Die aus der für alle $x \geqq 0$ konvergenten Dirichletschen Reihe*

$$(1) \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\lambda_\nu x}, \quad a_\nu > 0, \quad \lambda_\nu \geqq 0$$

durch n-fache Differentiation der einzelnen Reihenglieder entstehende Reihe

$$(2) \qquad (-1)^n \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \lambda_\nu^n e^{-\lambda_\nu x}$$

ist für alle $x \geqq \delta$ gleichmäßig konvergent. Dabei ist δ eine (beliebig kleine) positive Zahl und n eine beliebige feste Zahl aus der Folge 0, 1, 2, ...

Beweis. Die Menge aller $\{\lambda_\nu\}$ läßt sich in zwei Teilmengen

$$\{\lambda_\nu\} = \{\lambda'_\nu\} + \{\lambda''_\nu\}$$

aufspalten nach folgendem Gesichtspunkt: Zu jedem beliebig vorgegebenen $\delta > 0$ gibt es ein $L > 0$ derart, daß

$$\frac{(\lambda'_\nu)^n}{e^{\lambda'_\nu \delta/2}} < 1 \quad \text{für alle} \quad \lambda'_\nu \geqq L \qquad (n \text{ fest, pos. ganzz.}),$$

was ja ohne weiteres einzusehen ist. Für alle übrigen λ_ν, d. h. für die λ_ν'' gilt

$$\lambda_\nu'' \leqq L.$$

Das Gleichheitszeichen in der vorletzten bzw. in der letzten Ungleichung tritt dann in Kraft, wenn L zur Menge $\{\lambda_\nu\}$ gehört und die vorletzte Beziehung mit demselben erfüllt bzw. nicht erfüllt ist. Sodann kann man schreiben:

$$(-1)^n \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \lambda_\nu^n e^{-\lambda_\nu x} = (-1)^n \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu'(\lambda_\nu')^n e^{-\lambda_\nu' x} + (-1)^n \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu''(\lambda_\nu'')^n e^{-\lambda_\nu'' x}.$$

Die a_ν' bzw. die a_ν'' sind die zu λ_ν' bzw. zu λ_ν'' gehörigen Koeffizienten aus (1):

$$\{a_\nu\} = \{a_\nu'\} + \{a_\nu''\}.$$

Für $x \geqq \delta$ gilt dann für die Glieder der ersten der beiden rechts stehenden Summen

$$a_\nu'(\lambda_\nu')^n e^{-\lambda_\nu' x} \leqq a_\nu' \frac{(\lambda_\nu')^n}{e^{\lambda_\nu' \delta/2}} \cdot e^{-\lambda_\nu' \delta/2}$$

und weiter unter Berücksichtigung der Definition von L

$$< a_\nu' e^{-\lambda_\nu' \delta/2}.$$

Entsprechend für die Glieder der zweiten Summe

$$a_\nu''(\lambda_\nu'')^n e^{-\lambda_\nu'' x} \leqq L^n a_\nu'' e^{-\lambda_\nu'' \delta}.$$

Nun sind aber $a_\nu' e^{-\lambda_\nu' \delta/2}$ und $a_\nu'' e^{-\lambda_\nu'' \delta}$ Glieder zweier Reihen, die beide als Teilreihen von (1) mit $x = \delta/2$ bzw. $x = \delta$ konvergieren, da ja die Reihe (1) nur positive Glieder hat, womit Satz 1 bewiesen ist.

Aus Formel (2) S. 275 ist jetzt sofort die Notwendigkeit der Bedingungen 2) und 3) abzulesen.

Bevor wir die Bedingung 4) nachweisen, wollen wir vorausschicken, daß die Bedingung 3) besagt, daß die durch die Reihe (1) dargestellte Funktion, die wir mit $f(x)$ bezeichnen wollen, eine im Hausdorffschen Sinne[6]) *total monotone* Funktion ist. Demzufolge gibt es, wie in der zitierten Arbeit von F. Hausdorff gezeigt wird, eine Belegungsfunktion $\Psi(u)$ derart, daß

$$f(x) = \int_0^1 u^x \, d\,\Psi(u) \tag{3}$$

gilt. Dabei ist $\Psi(u)$ eine in $0 \leqq u \leqq 1$ definierte und daselbst monoton wachsende Funktion (die auch abteilungsweise konstant sein kann). Wenn wir die Bedingungen $\Psi(0) = 0$ und $\Psi(u) = \Psi(u + 0)$ für $0 < u < 1$

[6]) F. Hausdorff, „Summationsmethoden und Momentenfolgen", I und II, Math. Zeitschr. 9 (1921) S. 74–109 und S. 280–299. Insbes. S. 95, 102–103. 286–287.

(Rechtsstetigkeit) hinzunehmen, die auf den Wert des STIELTJESschen Integrals ohne Einfluß sind, dann ist $\Psi(u)$ eindeutig festgelegt und umgekehrt ist nach Vorgabe von $\Psi(u)$ die Momentenfunktion $f(x)$ eindeutig bestimmt. Wir wollen hier noch hervorheben, daß in unserem Falle $\Psi(u)$ an der Stelle $u = 0$ stetig ist und zwar wegen der Stetigkeit von $f(x)$ an der Stelle $x = 0$ [7]). Wenn weiterhin von total monotonen Funktionen die Rede ist, so sind stets solche gemeint, die für $x \geqq 0$ stetig sind.

Wir fragen nun nach der Belegungsfunktion $\Psi(u)$ unserer durch (1) definierten total monotonen Funktion $f(x)$. Wir beweisen zunächst den

Hilfssatz. Es sei ϑ eine gegebene Zahl $0 < \vartheta < 1$. Dann gilt für jedes $u \neq \vartheta$, wo auch $0 < u < 1$, die Ungleichung

$$\frac{u^{-\frac{1}{\lg \vartheta}} \cdot \lg u}{\vartheta^{-\frac{1}{\lg \vartheta}} \cdot \lg \vartheta} < 1 .$$

Beweis. Betrachten wir $-u^\beta \lg u$, wo $\beta > 0$ und fest, $0 < u < 1$, als Funktion von u, so ist dieselbe in dem betrachteten Intervall positiv und verschwindet für $u = 0$ und $u = 1$. Dazwischen liegt ein Maximum, das sich an der Stelle $u = e^{-\frac{1}{\beta}}$ ergibt. Somit ist in

$$\frac{-u^\beta \lg u}{e^{-1} \cdot \frac{1}{\beta}}$$

der Nenner stets größer als der Zähler, wenn nur $u \neq e^{-\frac{1}{\beta}}$ ist. Wenden wir das an auf $\beta = -\frac{1}{\lg \vartheta}$, so haben wir die Behauptung.

Über die Größe eines Sprunges α an der Stelle ϑ einer Belegungsfunktion entscheidet der folgende Satz, den wir zunächst allgemein für jede beliebige total monotone Funktion $\mu(x)$ aussprechen wollen.

Satz 2. *Es sei $\chi(u)$ die Belegungsfunktion einer total monotonen Funktion $\mu(x)$. Dann ist*

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{e}{\lg \vartheta}\right)^n \mu^{(n)}\left(-\frac{n}{\lg \vartheta}\right) = \chi(\vartheta + 0) - \chi(\vartheta - 0)$$

für $0 < \vartheta < 1$.

Beweis. Wir setzen $\chi(\vartheta + 0) - \chi(\vartheta - 0) = \alpha$. Zunächst gilt mit $\beta > 0$ für alle $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\int_0^1 \left(\frac{u^\beta \lg u}{\vartheta^\beta \lg \vartheta}\right)^n d\chi(u) = \lim \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\xi_i^\beta \lg \xi_i}{\vartheta^\beta \lg \vartheta}\right)^n [\chi(u_i) - \chi(u_{i-1})]$$

[7]) Der Beweis befindet sich in der S. 276 zitierten Arbeit von F. HAUSDORFF S. 103.

$$= \lim \left\{ \chi(u_\nu) - \chi(u_{\nu-1}) + \sum_{i=1}^{k}{}' \left(\frac{u_i^\beta \lg u_i}{\vartheta^\beta \lg \vartheta} \right)^n [\chi(u_i) - \chi(u_{i-1})] \right\},$$

wobei $\sum'$ bedeuten soll, daß in dieser Summe das Glied fehlt, wo $u_i = \vartheta$ ist. Dies läßt sich stets erreichen, wenn man die Intervallteilung (u_{i-1}, u_i) entsprechend wählt, es sei dies bei $u_i = u_\nu \equiv \vartheta$ der Fall.

Da nun nach Voraussetzung

$$\lim_{u_{\nu-1} \to u_\nu} [\chi(u_\nu) - \chi(u_{\nu-1})] = \alpha$$

ist, gilt für das gesamte Integral

$$\int_0^1 \left(\frac{u^\beta \lg u}{\vartheta^\beta \lg \vartheta} \right)^n d\chi(u) \geqq \alpha \tag{4}$$

für alle $n = 0, 1, 2, \ldots$ und jedes $\beta > 0$.

Schreiben wir jetzt dieses Integral in der Form

$$\int_0^1 \left(\frac{u^\beta \lg u}{\vartheta^\beta \lg \vartheta} \right)^n d\chi(u)$$

$$= \int_0^{\vartheta-\delta} \ldots d\chi(u) + \int_{\vartheta-\delta}^{\vartheta+\delta} \ldots d\chi(u) + \int_{\vartheta+\delta}^{1} \ldots d\chi(u), \tag{5}$$

wo über die Wahl von $\delta > 0$ noch weiter unten die Rede sein wird, so können wir auf die Ausdrücke in den Klammern des ersten und des letzten Integrals den vorhin bewiesenen Hilfssatz anwenden, wenn wir dementsprechend $\beta = -\frac{1}{\lg \vartheta}$ wählen.

Es ist dann

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{\vartheta-\delta} \left(\frac{u^{-\frac{1}{\lg \vartheta}} \lg u}{\vartheta^{-\frac{1}{\lg \vartheta}} \lg \vartheta} \right)^n d\chi(u) = 0$$

und ebenso

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\vartheta+\delta}^{1} \left(\frac{u^{-\frac{1}{\lg \vartheta}} \lg u}{\vartheta^{-\frac{1}{\lg \vartheta}} \lg \vartheta} \right)^n d\chi(u) = 0,$$

denn in den beiden Integrationsintervallen ist ja stets $u \neq \vartheta$, und somit sind sämtliche Bedingungen des Hilfssatzes erfüllt. Die Aus-

drücke in den Klammern sind $\leqq \eta$, wo η eine von u unabhängige Zahl < 1 ist. Der Integrand des zweiten Integrals von (5) ist dann jedenfalls $\leqq 1$, so daß wieder mit $\beta = -\frac{1}{\lg \vartheta}$

$$\int_{\vartheta-\delta}^{\vartheta+\delta} \left(\frac{u^{-\frac{1}{\lg \vartheta}} \lg u}{\vartheta^{-\frac{1}{\lg \vartheta}} \lg \vartheta} \right)^n d\chi(u) \leqq \chi(\vartheta+\delta) - \chi(\vartheta-\delta) = \alpha + \gamma$$

ist.

Nun ist ja

$$\lim_{\delta \to 0} [\chi(\vartheta+\delta) - \chi(\vartheta-\delta)] = \alpha$$

und daher kann man nach Vorgabe eines beliebigen $\varepsilon > 0$ das $\delta > 0$ so bestimmen, daß $\gamma < \varepsilon$ wird. Somit gilt für das gesamte Integral

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 \left(\frac{u^{-\frac{1}{\lg \vartheta}} \lg u}{\vartheta^{-\frac{1}{\lg \vartheta}} \lg \vartheta} \right)^n d\chi(u) \leqq \alpha$$

und daraus folgt mit (4) S. 278

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 \left(\frac{u^{-\frac{1}{\lg \vartheta}} \lg u}{\vartheta^{-\frac{1}{\lg \vartheta}} \lg \vartheta} \right)^n d\chi(u) = \alpha .$$

Formen wir diesen Ausdruck um unter Berücksichtigung von

$$\mu^{(n)}(x) = \int_0^1 u^x (\lg u)^n \, d\chi(u),$$

wo wir x ersetzen durch $-\frac{n}{\lg \vartheta}$, so wird

$$\alpha = \lim_{n \to \infty} \frac{\mu^{(n)}\left(-\frac{n}{\lg \vartheta}\right)}{\left(\vartheta^{-\frac{1}{\lg \vartheta}} \lg \vartheta\right)^n} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{e}{\lg \vartheta}\right)^n \mu^{(n)}\left(-\frac{n}{\lg \vartheta}\right),$$

d. i. die Behauptung. Dieser Ausdruck geht durch die Substitution $\vartheta = e^{-\Lambda}$ über in den der Bedingung 4) des Hauptsatzes. Da es aber nur höchstens abzählbar viele Sprünge gibt, ist dieser Ausdruck nur für eine abzählbare Menge der Λ von 0 verschieden.

Wir wollen jetzt diesen Satz auf die durch die Reihe (1) definierte total monotone Funktion $f(x)$ anwenden. Wenn wir darin $e^{-\lambda_\nu} = \Theta_\nu$ setzen, so erhalten wir aus

(1a) $$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \Theta_\nu^x, \text{ wo } 0 < \Theta_\nu \leqq 1,\ a_\nu > 0,\ x \geqq 0,$$

durch n-fache Differentiation und nachdem wir x durch $-\frac{n}{\lg \vartheta}$ ersetzt haben

$$f^{(n)}\left(-\frac{n}{\lg \vartheta}\right) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu (\lg \Theta_\nu)^n \Theta_\nu^{-\frac{n}{\lg \vartheta}}.$$

Der Ausdruck des Satzes 2 wird dann

(6) $$\left(\frac{e}{\lg \vartheta}\right)^n f^{(n)}\left(-\frac{n}{\lg \vartheta}\right) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \left(\frac{\lg \Theta_\nu \Theta_\nu^{-\frac{1}{\lg \vartheta}}}{\lg \vartheta \vartheta^{-\frac{1}{\lg \vartheta}}}\right)^n,$$

wobei wir $e \equiv \vartheta^{\frac{1}{\lg \vartheta}}$ gesetzt haben. Nach unserem Hilfssatz ist

$$\frac{\lg \Theta_\nu \Theta_\nu^{-\frac{1}{\lg \vartheta}}}{\lg \vartheta \vartheta^{-\frac{1}{\lg \vartheta}}} \begin{cases} < 1, \text{ wenn } \vartheta \neq \Theta_\nu \\ = 1, \text{ wenn } \vartheta = \Theta_\nu. \end{cases}$$

Wegen der Konvergenz von $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ ist die gleichmäßige Konvergenz in n der Reihe (6) sichergestellt. Das bedeutet aber, daß die rechte Seite von (6) beim Grenzübergang $n \to \infty$ nur dann nicht verschwindet, wenn $\vartheta = \Theta_\nu$ ist. Dann ist sie aber gleich a_ν, und nach Satz 2 liegt dann an der Stelle Θ_ν ein Sprung vor von der Größe a_ν, wie auch zu erwarten war. Wir formulieren daher den

Satz 3. *Die Sprungstellen in* $0 < u < 1$ *der Belegungsfunktion von* $f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \Theta$ *sind gegeben durch die* $0 < \Theta_\nu < 1$ *und die Größe der dazugehörigen Sprünge ist gleich den Koeffizienten* a_ν.

Wenn nun an der Stelle $u = 1$ ein Sprung vorliegt, so erscheint dieser, wie aus der Definition von $\int_0^1 u^x d\chi(u)$ analog wie S. 274 zu ersehen ist, als additive Konstante der Momentfunktion $\mu(x)$. (Es ist dies hier also der Fall $\lambda_\nu = 0$ bzw. $\Theta_\nu = 1$.) Nun ist aber $\mu(x)$ stets positiv und mit wachsendem x abnehmend, so daß der Sprung

$$\chi(1) - \chi(1-0) = \lim_{x \to \infty} \mu(x)$$

wird.

Es ist in unserem Fall wegen (1) bzw. (1a)

$$f(0) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu,$$

nach Satz 3 also gleich der Summe sämtlicher Sprünge innerhalb $(0, 1)$ der Belegungsfunktion von $f(x)$, wo wir auch noch den evtl. vorhandenen Sprung an der Stelle $u = 1$ hinzuaddieren müssen. Für die a_ν können wir also den Ausdruck des Satzes 2 einsetzen und erhalten nach Addition von $\lim_{n\to\infty} f(n)$, wenn wir statt Θ_ν wieder $e^{-\lambda_\nu}$ setzen und statt λ_ν einfach A schreiben die Bedingung 4) des Hauptsatzes, womit die Notwendigkeit des letzteren nachgewiesen ist.

§ 3.

Aus Satz 2 wollen wir noch als Nebenergebnis einen Satz formulieren über die schon öfters aufgeworfene Frage[8]) nach den notwendigen und hinreichenden Bedingungen, die eine Momentfunktion erfüllen muß, damit die dazugehörige Belegungsfunktion überall stetig sei. Es wurde dabei in der erwähnten Literatur diese Frage für total monotone Folgen ausgesprochen und auf verschiedene Arten beantwortet; der folgende Satz bringt wiederum eine andere Antwort. Wir bemerken noch, daß jeder total monotonen Funktion eine total monotone Folge zugeordnet ist und umgekehrt[9]).

Satz 4. *Die Belegungsfunktion $\chi(u)$ einer für $x \geqq 0$ stetigen total monotonen Funktion $\mu(x)$ ist dann und nur dann im ganzen Intervall $0 \leqq u \leqq 1$ stetig, wenn*

$$\lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{e}{\lg \vartheta} \right)^n \mu^{(n)} \left(-\frac{n}{\lg \vartheta} \right) + \mu(n) \right] = 0$$

ist für alle $0 < \vartheta < 1$.

Beweis. Beide in der eckigen Klammer stehenden Summanden sind nicht negativ. Für $0 < u < 1$ ist die Behauptung mit Satz 2 erledigt. An der Stelle $u = 0$ folgt die Stetigkeit von $\chi(u)$ aus derjenigen von $\mu(x)$ bei $x = 0$, wie S. 277 bemerkt. Für die Stelle $u = 1$ ist die Stetigkeit mit $\lim_{n\to\infty} \mu(n) = 0$ gegeben, gemäß den Ausführungen S. 280. Damit ist der Satz 4 bewiesen.

§ 4.

Wir wollen jetzt wieder auf den § 2 zurückgreifen und aus diesem noch einige Schlüsse ziehen. Zunächst wollen wir die zu

---

[8]) I. Schoenberg, „Über das asymptotische Verhalten reeller Zahlen mod 1." Math. Zeitschr. 28 (1928) S. 171–199.

Th. Kaluza, „Über vollmonotone Folgen mit stetiger Belegungsfunktion." Math. Zeitschr. 28 (1928) S. 200–202.

I. Schoenberg, „Über total monotone Folgen mit stetiger Belegungsfunktion." Math. Zeitschr. 30 (1929) S. 761–767.

[9]) Vgl. Fußnote S. 276.

(1 a) $$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \Theta_\nu^x \qquad (0 < \Theta_\nu \leqq 1)$$

gehörige Belegungsfunktion $\Psi(u)$ angeben. Aus allem bisher gesagten fassen wir folgende Eigenschaften zusammen, die wir von $\Psi(u)$ verlangen:

1) $\Psi(u)$ ist in $0 \leqq u \leqq 1$ definiert und monoton wachsend,

2) $\Psi(0) = 0$,

3) $\Psi(u)$ ist in $0 \leqq u < 1$ rechtsstetig,

4) $\Psi(u)$ macht an der Stelle $u = 1$ einen Sprung von der Größe $\lim_{n \to \infty} f(n) = a(1)$,

5) $\Psi(u)$ macht an den Stellen $u = \Theta_\nu$ $(0 < \Theta_\nu < 1)$, $(\nu = 1, 2, \ldots)$ in $0 \leqq u < 1$ Sprünge von der Größe $a_\nu = a(\Theta_\nu)$,

6) $\Psi(1) = f(0) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu = \sum_{0 < \Theta_\nu \leqq 1} a(\Theta_\nu)$,

7) $\Psi(u)$ ist stetig in $u \neq \Theta_\nu$, $0 \leqq u < 1$.

Die Eigenschaft 6) folgt unmittelbar aus (3) S. 276 und wegen (1 a).

Wir konstruieren nun eine Funktion $\Phi(u)$, die die verlangten 7 Eigenschaften besitzt, und zeigen danach, daß sie identisch ist mit der gesuchten Belegungsfunktion $\Psi(u)$. Die durch

(7) $$\Phi(u) = \sum_{0 < \Theta_\nu \leqq u} a(\Theta_\nu), \quad \Phi(0) = 0$$

definierte Funktion erfüllt sicher alle obigen Eigenschaften, was leicht zu ersehen ist. Wir wollen zeigen, daß dies auch wirklich die gesuchte Belegungsfunktion ist.

Satz 5. *Die durch* (7) *definierte Funktion* $\Phi(u)$ *ist identisch mit der Belegungsfunktion* $\Psi(u)$ *der durch* (1 a) *definierten total monotonen Funktion* $f(x)$.

Beweis. Die Richtigkeit für die Ränder des Integrationsintervalles zeigt unmittelbar die Definition und Eigenschaft 6). Wenn aber die Behauptung im Inneren von (0, 1) falsch wäre, so gäbe es daselbst mindestens eine Stelle, etwa u_0, wo $\Psi(u_0) \neq \Phi(u_0)$. Es sei zunächst $\Psi(u_0) > \Phi(u_0)$ angenommen. Es gilt aber allgemein

(8) $$\Psi(1) \geqq \Psi(u_0) + \sum_{u_0 < \Theta_\nu \leqq 1} a(\Theta_\nu),$$

da infolge der Eigenschaft 5) $\Psi(u)$ im Intervall $(u_0, 1)$ mindestens um alle dort vorhandenen Sprünge wachsen muß. Da nun nach Voraussetzung $\Psi(u_0) > \Phi(u_0)$, erhalten wir mit (7)

$$\Psi(1) > \Phi(u_0) + \sum_{u_0 < \Theta_\nu \leqq 1} a(\Theta_\nu) = \sum_{0 < \Theta_\nu \leqq u_0} a(\Theta_\nu) + \sum_{u_0 < \Theta_\nu \leqq 1} a(\Theta_\nu)$$
$$= \sum_{0 < \Theta_\nu \leqq 1} a(\Theta_\nu) = f(0),$$

also einen Widerspruch zur Eigenschaft 6).

Nimmt man jetzt $\Psi(u_0) < \Phi(u_0)$ an, so ergibt sich ganz analog

$$\Psi(0) \leqq \Psi(u_0) - \sum_{0 < \Theta_\nu \leqq u_0} a(\Theta_\nu) < \Phi(u_0) - \sum_{0 < \Theta_\nu \leqq u_0} a(\Theta_\nu)$$
$$= \sum_{0 < \Theta_\nu \leqq u_0} a(\Theta_\nu) - \sum_{0 < \Theta_\nu \leqq u_0} a(\Theta_\nu) = 0,$$

also ein Widerspruch zur Eigenschaft 2). Es ist demnach für alle $0 \leqq u \leqq 1$

$$\Psi(u) = \Phi(u),$$

womit der Satz bewiesen ist.

Es gilt jetzt also die Darstellung

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \Theta_\nu^x = \int_0^1 u^x \, d\,\Psi(u), \tag{9}$$

und damit ist die in § 1 gemachte Aussage bestätigt, wonach das Stieltjessche Integral der Belegungsfunktion $\Psi(u)$ in eine (verallgemeinerte) Dirichletsche Reihe übergeht, gleichgültig ob $\Psi(u)$ Häufungsstellen ihrer Sprünge im Inneren des Integrationsintervalles besitzt oder nicht. Wir bemerken hierzu, daß die Gleichung (9) dann und nur dann gilt, wenn $\Psi(1) = \sum_{0 < \Theta_\nu \leqq 1} a(\Theta_\nu)$, d. h. gleich der Summe sämtlicher Sprünge ist. Die Notwendigkeit dieser Aussage haben wir soeben gesehen, daß sie auch hinreicht, zeigt der § 5.

§ 5.

Es soll jetzt gezeigt werden, daß die Bedingungen des Hauptsatzes für die Entwickelbarkeit auch hinreichend sind. Dazu wollen wir annehmen, daß eine gegebene für $x \geqq 0$ definierte Funktion $f(x)$ den 4 dortigen Forderungen genügt. Wegen 1), 2) und 3) ist $f(x)$ total monoton, und es gibt demnach wieder eine Belegungsfunktion $\Psi(u)$[10], so daß

$$f(x) = \int_0^1 u^x \, d\,\Psi(u) \tag{3}$$

gilt. Die Sprungstellen Θ_ν und die dazugehörigen Sprunggrößen a_ν derselben liefert wieder der Satz 2 bzw. der $\lim_{n \to \infty} f(n)$. Aus der Bedingung 4) des Hauptsatzes folgt nun weiter, daß

[10]) Vgl. Fußnote S. 276.

$$\sum_{0<\Theta_\nu\leq 1} a(\Theta_\nu) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu = f(0)$$

ist. Damit und nach allen sonst bisher gemachten allgemeinen Aussagen über Belegungsfunktionen sind nun alle 7 Eigenschaften der S. 282 erfüllt, und $\Psi(u)$ ergibt sich wie vorhin aus der Definition (7), der Beweis ist der des Satzes 5.

Jetzt behaupten wir, daß die zu dieser Belegungsfunktion gehörige Momentfunktion $f(x)$ gleich der DIRICHLETschen Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \Theta_\nu^x$ ist. In der Tat ist ja, wie S. 276/277 bemerkt, die Momentfunktion durch die Belegungsfunktion eindeutig festgelegt, und wie wir in § 4 gesehen haben, erzeugt diese DIRICHLETsche Reihe gerade die Belegungsfunktion $\Psi(u)$. Die Konvergenz derselben für alle $x \geqq 0$ ist bereits durch die Bedingungen 1—3 des Hauptsatzes sichergestellt, da ja die Belegungsfunktion beschränkt ist. Es gilt jetzt Gleichung (9) S. 283, und damit ist alles bewiesen.

(Eingegangen am 12. April 1950.)

Mathematische Zeitschrift, Band 53, Heft 3, S. 285—290 (1950).

Implicative Boolean Algebra[1]).

To Erich Kamke on his 60th birthday August 18. 1950.

By

Arthur H. Copeland Sr. in Ann Arbor, Mich. (USA.).

1. Introduction. One might be tempted to believe that the proposition "y implies x" is equivalent to the proposition "x is implied by y" and that this in turn is equivalent to "x if y". However, if "y implies x" is interpreted either as strict or material implication and if "x if y" is interpreted in any sense which is appropriate to the theory of probability[2]) then these two proprositions are not equivalent. The proposition "x if y" is an implication which is neither strict nor material. All three implications are nonetheless related.

If x and y are elements of a Boolean algebra then the material implication "y implies x" is the proposition "x or not y" and this proposition is also an element of the Boolean algebra. If the Boolean algebra is sufficiently extensive then it can contain all propositions of the form "y if x" but such propositions cannot be defined in terms of y and x by means of the Boolean operations. An implicative Boolean algebra can be described roughly as one which contains all propositions of the form "y if x". No finite Boolean algebra (with the exception of the trivial two element Boolean algebra) is implicative. In an implicative Boolean algebra, "y if x" is a tautology if and only if "x materially implies y" is a tautology. Moreover "y strictly implies x" whenever "y if x" is a tautology.

2. The cross product operation. In a Boolean algebra B let the operations "and", "or", "not" be denoted respectively by $\cdot$, $\vee$, $\sim$, let the contradiction be denoted by 0 and the tautology be denoted by 1, let the complete disjunction be defined by the equation

$$x + y = (x \cdot \sim y) \vee (y \cdot \sim x)$$

and let the operation "if" be denoted by $<$. Thus the proposition "x if y" is denoted by $x < y$. Instead of defining the operator $<$ directly it is convenient to define first a cross product $x \times y$ which is analogous to multiplication and then to define the proposition $z = x < y$ as the solution of the equation

$$x \cdot y = y \times z.$$

This equation has an unique solution except when $y = 0$. The operation $<$ is roughly analogous to division. The cross product is defined by the following postulates.

[1]) Presented to the American Math. Soc. April 16, 1948.

[2]) See Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie by Erich Kamke, pp. 27—30.

P0. If x, y are elements of B then $x \times y$ is an element of B.
P1. $x \times (y \times z) = (x \times y) \times z$
P2. $x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z)$
P3. $x \times (y \cdot z) = (x \times y) \cdot (x \times z)$
P4. If $x \times y = x \times z$ and $x \neq 0$ then $y = z$
P5. $x \times 1 = x$
P6. For every x, y there exists z such that $x \cdot y = y \times z$ if $y \neq 0$.

An implicative Boolean algebra can now be defined as one which satisfies postulates P0 to P6. Some further properties of the cross product are given in the following theorems.

T1. $1 \times x = x$
For $1 \times (1 \times x) = (1 \times 1) \times x = 1 \times x$ and hence $1 \times x = x$
T2. $x \times 0 = 0$ [by P4.
For $0 = (x \times 0) + (x \times 0) = x \times (0 + 0) = x \times 0$
T3. $x \cdot (x \times y) = x \times y$
For $x \cdot (x \times y) = (x \times 1) \cdot (x \times y) = x \times (1 \cdot y) = x \times y$
T4. $0 \times x = 0$
For $0 \times x = 0 \cdot (0 \times x) = 0$
T5. If $x \times y = 1$ then $x = y = 1$
For $x = x \cdot 1 = x \cdot (x \times y) = (x \times 1) \cdot (x \times y) = x \times (1 \cdot y)$
$= x \times y = 1$ and $y = 1 \times y = x \times y = 1$
T6. If $x \times y = 0$ then $x = 0$ or $y = 0$
For if $x \times y = 0$ then $x \times y = x \times 0$ and by P4 $y = 0$ if $x \neq 0$.
T7. $x \times (y \vee z) = (x \times y) \vee (x \times z)$
For $x \times (y \vee z) = x \times [y + z + (y \cdot z)] = (x \times y) + (x \times z)$
$+ (x \times y) \cdot (x \times z) = (x \times y) \vee (x \times z)$
T8. $x \times \sim y = x \cdot \sim (x \times y)$
For $x \times \sim y = x \times (1 + y) = (x \times 1) + (x \times y) = x \cdot 1 + x \cdot (x \times y)$
$= x \cdot [1 + (x \times y)] = x \cdot \sim (x \times y)$.

3. The operator $\subset$. The proposition $x \subset y$ is defined as follows:

D1. If $y \neq 0$ then $x \subset y = z$ if and only if $x \cdot y = y \times z$.

The following theorems show some of the analogies between the operation $\subset$ and division.

T9. If $y \neq 0$ then $x \subset y$ exists and is unique.
See P6 and P4.
T10. $(x \times y) \subset x = y$
For if $(x \times y) \subset x = z$ then $x \times y = (x \times y) \cdot x = x \times z$
and hence $y = z$
T11. $(x + y) \subset z = (x \subset z) + (y \subset z)$
For if $x \subset z = u$ and $y \subset z = v$ then $x \cdot z = z \times u$
and $y \cdot z = z \times v$. Hence $(x + y) \cdot z = (z \times u) + (z \times v)$
$= z \times (u + v)$. Thus $(x + y) \subset z = u + v = (x \subset z) + (y \subset z)$
T12. $x \subset 1 = x$
For set $x \subset 1 = u$ then $x = x \cdot 1 = 1 \times u = u$.

The following theorems give some of the properties which are peculiar to the operator $\subset$.

T 13. $x \times (y \subset x) = x \cdot y$

For if $y \subset x = z$ then $y \cdot x = x \times (y \subset x)$.

Compare theorems 10 and 13.

T 14. $(x \cdot y) \subset z = (x \subset z) \cdot (y \subset z)$

T 15. $(x \vee y) \subset z = (x \subset z) \vee (y \subset z)$

Theorems 14, 15 are proved in a manner similar to that of theorem 11.

T 16. $x \subset y = (x \cdot y) \subset y$

For if $x \subset y = z$ then $x \cdot y = (x \cdot y) \cdot y = y \times z$ and hence $(x \cdot y) \subset y = z$.

T 17. $1 \subset x = x \subset x = 1$ if $x \neq 0$

For if $1 \subset x = u$ then $x \times 1 = x = x \cdot 1 = x \times u$ and hence $u = 1$. Furthermore $1 \subset x = x \subset x$ by theorem 16.

T 18. $(\sim x) \subset y = \sim (x \subset y)$

For $(\sim x) \subset y = (1 + x) \subset y = (1 \subset y) + (x \subset y) = 1 + (x \subset y) = \sim (x \subset y)$.

T 19. $(x \subset y) \subset z = x \subset (y \times z)$.

When the elements of the Boolean algebra are interpreted as 1,0-sequences then the operation $\subset$ is equivalent to the selection operation of VON MISES. Thus $x \subset y$ is the sequence obtained by operating on the sequence x by the selection y. Theorem 19 shows that if the selection operation y is followed by the selection operation z, the resultant is equivalent to the single selection operation $y \times z$. Thus theorem 19 enables us to interpret the cross product as the resultant of two selections. However, this interpretation is not always applicable since our theory applies to a much broader class of Boolean algebras than those whose elements can be interpreted as 1, 0-sequences.

To prove theorem 19 set $x \subset (y \times z) = u$. Then $x \cdot (y \times z) = (y \times z) \times u = y \times (z \times u)$. But $x \cdot (y \times z) = y \cdot x \cdot (y \times z) = [y \times (x \subset y)] \cdot (y \times z) = y \times [(x \subset y) \cdot z]$. That is, $y \times (z \times u) = y \times [(x \subset y) \cdot z]$ and hence $z \times u = (x \subset y) \cdot z$. Therefore $u = (x \subset y) \subset z = x \subset (y \times z)$.

T 20. $x \subset (y \cdot z) = (x \subset y) \subset (z \subset y)$

For $x \subset (y \cdot z) = x \subset [y \times (z \subset y)] = (x \subset y) \subset (z \subset y)$.

T 21. If $y \neq 0$ then $x \subset y = 1$ if and only if $x \vee \sim y = 1$.

For if $x \subset y = 1$ then $x \cdot y = y \times 1 = y$ and conversely. It is well known that $x \cdot y = y$ if and only if $x \vee \sim y = 1$.

This theorem shows the relations between material and strict implication and the operation $\subset$.

T 22. If $z \subset x = y$ and $z \cdot x = z$ then $z = x \times y$.

For $x \times y = x \times (z \subset x) = x \cdot z = z$.

D 2. x^n is defined inductively by the relations

a) $x^0 = 1$ (even when $x = 0$)

b) $x^n = x^{n-1} \times x$.

T 23. If an implicative Boolean algebra contains more than two elements it contains infinitely many elements.

For if B contains more than two elements then there is an element x different from 0 and 1. It remains to show that the elements $1, x, x^2, x^3, \ldots$ are all distinct. Suppose that

$$x^n \times 1 = x^n = x^{n+k} = x^n \times x^k.$$

Then $x^k = 1 = x^{k-1} \times x$ and hence $x = 1$. This is contrary to hypothesis and the theorem is proved.

4. Probabilities. In this section we shall show that an implicative Boolean algebra forms an adequate basis for the theory of probability. We shall introduce probabilities by means of the following postulates.

P 7. If x is an element of B then $p(x)$ is a real non-negative number.

P 8. If $x \cdot y = 0$ then $p(x \vee y) = p(x) + p(y)$.

Postulates 7, 8 require that $p(x)$ shall be a measure function.

P 9. $P(1) = 1$.

Postulate 9 requires that $p(x)$ shall be a probability measure. In the system of KOLMOGOROFF $p(x)$ is defined over a field of point sets but in view of STONE's representation theorem this is equivalent to the requirement that $p(x)$ be defined over a Boolean algebra. Hence our system is the same as that of KOLMOGOROFF thus far. The difference lies in the treatment of conditional probabilities which are introduced in our system by the following postulate

P 10. $p(x \times y) = p(x)\ p(y)$.

The following theorems show how the theory of probability can be developed.

T 24. $p(x \cdot \sim y) = p(x) - p(x \cdot y)$

Corr. 1. $p(\sim x) = 1 - p(x)$

Corr. 2. $p(x \cdot y) \leqq p(x) \leqq 1$.

T 25. $p(x \vee y) = p(x) + p(y) - p(x \cdot y)$

T 26. $p(x \cdot y) = p(x)\ p(y \subset x)$.

For $p(x \cdot y) = p[x \times (y \subset x)] = p(x)\ p(y \subset x)$.

KOLMOGOROFF defines the conditional probability $p(y \subset x)$ to be $p(x \cdot y) / p(x)$ when $p(x) \neq 0$ and this is in agreement with theorem 26. The proposition $y \subset x$ is not however an element of his system.

5. Interpretations. The trivial example of the two element Boolean algebra satisfies the postulates and hence establishes their consistency, but if this were the only example the system would indeed be trivial. We shall therefore consider an example which was suggested to the author by Dr. MAX A. WOODBURY.

We shall let the unit element of B be the unit interval I: $0 \leqq t \leqq 1$, and let the remaining elements X, Y, Z, etc. be LEBESGUE measurable sub-sets of the unit interval. The operations $\sim X$, $X \cdot Y$, $X \vee Y$ and $X + Y$ are interpreted respectively as complementation, intersection, union,

and symmetric difference. The probability $p(X)$ of an element X is the measure of X. Two elements X, Y are regarded as equal if $p(X+Y)=0$. The cross product is defined as follows: Let $\varphi(X, t)$ be the fundamental function of the set X. Then $\varphi(X, t)$ is 1 or 0 according as t does or does not lie in X. With each element X is associated a monotone function

$$x(t) = \int_0^t \varphi(X, S)\, dS.$$

If $x(t) = y(t)$ then $\varphi(X, t) = \varphi(Y, t)$ almost everywhere and hence $p(X+Y)=0$ or $X=Y$. We note that $x(1) = p(X)$. When $x(1) \neq 0$ we define the fundamental function of $X \times Y$ to be

$$\varphi(X \times Y, t) = \varphi[Y, x(t)/x(1)]\ \varphi(X, t).$$

If $x(1)=0$ then $X \times Y$ is defined to be the null set. In all cases $X \times Y$ is defined and P0 is satisfied. We shall let $x \times y(t)$ denote the associated function for the element $X \times Y$. Then $x \times y(t) = x(1)\ y[x(t)/x(1)]$ if $x(1) \neq 0$, since the derivative of the right hand member is almost everywhere equal to the fundamental function of $X \times Y$.

To verify P1, note that

$$\begin{aligned}(x \times y) \times z(t) &= x \times y(1)\ z[x \times y(t)/x \times y(1)] \\ &= x(1)\ y(1)\ z\{x(1)\ y[x(t)/x(1)]/x(1)\ y(1)\} \\ x \times (y \times z)(t) &= x(1)\ y \times z[x(t)/x(1)] \\ &= x(1)\ y(1)\ z\{y[x(t)/x(1)]/y(1)\}.\end{aligned}$$

Since these two functions are equal it follows that $(X \times Y) \times Z = X \times (Y \times Z)$.

We shall verify P3 before verifying P2. We have

$$\begin{aligned}\varphi[X \times (Y \cdot Z), t] &= \varphi[Y \cdot Z, x(t)/x(1)]\ \varphi(X, t) \\ &= \varphi[Y, x(t)/x(1)]\ \varphi(X, t)\ \varphi[Z, x(t)/x(1)]\ \varphi(X, t) \\ &= \varphi(X \times Y, t)\ \varphi(X \times Z, t) = \varphi[(X \times Y) \cdot (X \times Z, t]\end{aligned}$$

and hence $X \times (Y \cdot Z) = (X \times Y) \cdot (X \times Z)$.

To verify P2 note that

$$\begin{aligned}\varphi[X \times (Y+Z), t] &= \varphi[Y+Z, x(t)/x(1)]\ \varphi(X, t) \\ &= \{\varphi[Y, x(t)/x(1)] + \varphi[Z, x(t)/x(1)] - 2\varphi[Y \cdot Z, x(t)/x(1)]\}\ \varphi(X, t) \\ &= \varphi[(X \times Y) + (X \times Z), t]\end{aligned}$$

and hence $X \times (Y+Z) = (X \times Y) + (X \times Z)$.

If $X \neq 0$ then $x(1) \neq 0$ and if $x \times y(t) = x(1)\ y[x(t)/x(1)] = x(1)\ z[x(t)/x(1)] = x \times z(t)$, then $y(t) = z(t)$. Hence $X \times Y = X \times Z$ implies that $Y = Z$ when $X \neq 0$ and therefore P4 is satisfied.

The verification of P5 is immediate. To verify P6 we have to show that when $y(1) \neq 0$, a function $z(t)$ can be determined so that

$$x \cdot y(t) = \int_0^t \varphi(X, S)\ \varphi(Y, S)\, dS = y \times z(t) = y(1)\ z[y(t)/y(1)].$$

But $z(t)$ can be so determined since $y(t)|y(1)$ takes on every value τ of the interval $0 \leqq \tau \leqq 1$ and since $x \cdot y(t_1) = x \cdot y(t_2)$ whenever $y(t_1) = y(t_2)$.

It should be noted that the functions $x(t)$, $y(t)$ etc. can also be taken as elements of an implicative Boolean algebra. The definitions of the Boolean operations and the cross product are suggested in the above discussion.

Another example has been suggested by DÖRGE[3]). The elements of B are ascending sequences of positive integers. If

$$x = \nu_1, \nu_2, \nu_3 \ldots$$

$$y = \mu_1, \mu_2, \mu_3 \ldots$$

are two such sequences then

$$x \times y = \mu_{\nu_1}, \mu_{\nu_2}, \mu_{\nu_3}, \ldots$$

The Boolean operations are the corresponding set theoretic operations where sequences are regarded as sets. A difficulty arises in the case of finite sequences. This difficulty can be avoided by restricting B so that it contains only infinite sequences such that $\nu_{k-1} - \nu_k$ is a periodic function of the integer k.

The proposition $x < y$ can be given an interpretation in an arbitrary Boolean algebra as follows. We observe that $x < y = u < y = z$ if and only if $x \cdot y = u \cdot y = y \times z$. Hence if $x < y = u < y$ then x and y belong to the same remainder class with respect to the ideal consisting of all elements of the form $v \cdot \sim y$. Thus $x < y$ can be interpreted as such a remainder class.

In an implicative Boolean algebra B the equation $y = z \times x$ is a transformation which establishes a 1 to 1 correspondence between the elements x of B and the elements y of the ideal consisting of all elements of the form $z \cdot u$. The fact that y is in the ideal follows from T3 and the fact that the transformation is 1 to 1 follows from P0 and T9.

6. Conclusion. In the theory of probability $x < y$ is regarded as a proposition having a similar character to the propositions x, y, $x \cdot y$, $x \vee y$, $\sim x$, etc. Since $x \cdot y$, $x \vee y$ and $\sim x$ are in the Boolean algebra B when x and y are in B it would seem appropriate for $x < y$ to be in B. This is the case when B is implicative. The use of an implicative Boolean algebra would impose no restriction on the theory of probability if the following conjecture were true, namely, that every Boolean algebra B is contained in a minimal implicative Boolean algebra $\mathrm{I}\,B$.

[3]) Math. Zeitschr. 32 (1930): 232 ff.

(Eingegangen am 3. Februar 1950.)

Die **MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT**

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind, und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sind stets besonders (etwa mit einem farbigen Stift) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Eßlinger Straße 16, **R. Nevanlinna,** Zürich/Schweiz, Hadlaubstraße 45,
K. Knopp, Tübingen, Am Apfelberg 6, **E. Schmidt,** Berlin-Steglitz, Sedanstraße 8,
F. K. Schmidt, Münster/W., Schlaunstraße 4.

Geschäftsführender Herausgeber:
H. Wielandt, Mainz, Göttelmannstraße $2^5/_{10}$

Springer-Verlag OHG — Berlin W 35, Reichpietschufer 20. — Heidelberg, Neuenheimer Landstraße 24. — Göttingen, Weender Straße 60.

Vertriebsvertretungen im Ausland: Schweiz: Lange, Maxwell & Springer A. G., Basel, Schützenmattstr. 43 — England, USA und übriges Ausland: Lange, Maxwell & Springer Ltd., 41—45 Neal Street, London W. C. 2.

53. Band. **Inhalt:** 4. Heft.

Seite

Gaier, D., University of Rochester, Todd Union, Rochester 3 N.Y., USA.: Über stetiges und asymptotisches Verhalten von Potenzreihen und Dirichletschen Reihen am Rande von Summationsgebieten 291

Jurkat, Dr. W., Tübingen, Mathem. Institut der Universität: Zur Konvergenztheorie der Fourierreihen 309

Haack-Hellwig, Prof. Dr. W. Haack, Institut für angew. Mathematik der Techn. Universität, Berlin-Charlottenburg 2, Hardenbergstr. 34: Über Systeme hyperbolischer Differentialgleichungen erster Ordnung II 340

Specht, Prof. Dr. W., Erlangen, Mathem. Seminar der Universität: Abschätzung der Wurzeln algebraischer Gleichungen II 357

Wagner, Doz. Dr. K., Köln-Rath, Wodanstr. 57: Zum Repräsentantenproblem der Logik für Aussagenfunktionen mit beliebig endlich oder unendlich vielen Wahrheitswerten 364

Pickert, Doz. Dr. G., Tübingen, Mathem. Institut der Universität: Bemerkungen zum Homomorphiebegriff 375

Buchholz, Prof. Dr. H., Seeheim, Bergstr. 22: Komplexe Integrale für die parabolischen Funktionen mit dem wesentlich singulären Kern $\exp(-z/2 \cdot \mathfrak{T}g\, s)$ 387

Unveränderter Nachdruck 1969 Springer-Verlag, Berlin / Heidelberg / New York

Fotodruck: Mikrokopie GmbH. · München 22 · Bruderstraße 9

Mathematische Zeitschrift, Band 53, Heft 4, S. 291—308 (1950).

Über stetiges und asymptotisches Verhalten von Potenzreihen und Dirichletschen Reihen am Rande von Summationsgebieten.

Von

Dieter Gaier in Göppingen.

Einleitung.

Das Funktionselement

$$(I) \qquad f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$$

der komplexen Variablen $z = re^{i\varphi}$ ($r \geqq 0$, φ reell) besitze den Konvergenzradius 1, und seine Teilsummen seien mit

$$s_n(z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu$$

bezeichnet. Die Aufgabe, aus dem Verhalten der Reihe (I) im Randpunkt $z_0 = 1$ ihres Konvergenzgebietes auf das Verhalten der dort durch (I) dargestellten analytischen Funktion bei Annäherung an diesen Randpunkt zu schließen, ist schon durch den bekannten Abelschen Grenzwertsatz angegriffen worden. In der Stolzschen Verallgemeinerung besagt er, daß unter der Voraussetzung der Konvergenz der Reihe (I) im Punkt $z_0 = 1$ sich $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ stetig verhält, wenn z in einem Stolzschen Winkelraum an $z_0 = 1$ heranrückt.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit Verallgemeinerungen dieses Problems in drei Richtungen:

1. Das Verhalten von Potenz- und Dirichletschen Reihen wird nicht nur am Rande des Konvergenzgebietes untersucht, sondern auch am Rande von Summationsgebieten, die man erhält, wenn man gewisse permanente Summierungsverfahren auf die Reihe (I) anwendet.

2. Statt vom Konvergenzverhalten der V-Transformation im Randpunkt z_0 des V-Summationsgebietes auf die Stetigkeit der dort dargestellten Funktion $f(z)$ bei Annäherung an z_0 zu schließen, wird allgemeiner ein gewisses asymptotisches Verhalten der V-Transformation in z_0 vorausgesetzt, d. h. bei Potenzreihen etwa

$$(II) \qquad V(n; s_\nu(z_0)) \sim n^q \qquad (n \to \infty)$$

und daraus ein bestimmtes asymptotisches Verhalten von $f(z)$ für $z \to z_0$ gefolgert.